Fachbereich Maschinenbau
Prof. Dr. Jakob Weiß

HOCHSCHULE BREMEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

WS 2000/2001

Ingenieurmathematik I

Literatur:

Lehrbücher:

1. Papula, L.:	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Bände 1 - 3 und Übungen Vieweg, Braunschweig	 (DM 54,00 / 58,00 / 62,00 /48,00)
2. Leupold u. a.:	Mathematik – ein Studienbuch für Ingenieure 1 + 2 Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 1994	 (je DM 48,00)
3. Fetzer/Fränkel:	Mathematik 1 + 2 VDI Verlag, Düsseldorf, 1995	 (je DM 78,00)
4. Stein, Sh. K.:	Einführungskurs Höhere Mathematik I + II Vieweg, Wiesbaden, 1996/97	 (DM 22,80 / 24,80)
5. Autorenkollektiv:	Analysis für Ingenieure Algebra und Geometrie für Ingenieure Fachbuchverlag, Leipzig, 1991	(DM 36,00) (DM 19,80)
6. Stöcker, H. (Hrsg.):	Analysis für Ingenieurstudenten 1 + 2 Verlag Harri Deutsch, Frankfurt	 (je DM 34,00)

Formelsammlungen:

1. Bartsch, H. J.:	Taschenbuch mathematischer Formeln Fachbuchverlag Leipzig, 1994	 (DM 29,80)
2. Stöcker, H.:	Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1995	 (DM 38,00)
3. Papula, L.:	Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler Vieweg, Braunschweig, 1998	 (DM 48,00)
4. Bronstein, I. N. u. a.:	Taschenbuch der Mathematik Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1997	 (DM 58,00)

U. B. 85, **Preis:**

Stand: 7. Februar 2001

Aufgabensammlungen / Repetitorien:

1. Herrmann, N.: Höhere Mathematik für Ingenieure: Aufgabensammlung
   Oldenbourg, München, 1994 (DM 32,00)
2. Erhardt–Ferron, A., Walter, H. : Mathematik-Repetitorium zur Prüfungsvorbereitung
   BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993 (DM 19,80)

Numerische Mathematik:

1. Engeln-Müllges, G., Reutter, F. Formelsammlung zur Numerischen Mathematik
   BI Wissenschaftsverlag, 1988 (DM)
2. Späth, H.: Numerik
   Vieweg, Braunschweig, 1994 (DM 39,80)

Computeralgebra:

1. Kofler, M.: Maple V, Release 4
   Addison–Wesley, 1996 (DM 69,90)
2. Burkhardt, W.: Erste Schritte mit Maple
   Springer, 1996 (DM 36,00)
3. Walz, A.: Maple V: Rechnen und Programmieren mit Release 4
   Oldenbourg, München, 1997 (DM 68,00)
4. Heinrich, E., Janetzko, H.-D. Das Maple Arbeitsbuch
   Vieweg, Braunschweig, 1995 (DM 39,50)
5. Eikelberg, M.: Einführung in die Arbeit mit Maple V (mit CD–ROM)
   Fachbuchverlag Leipzig, 1998 (DM 49,80)

Maple im Internet:

Waterloo Maple Inc.: `www.maplesoft.com`

Maple User Group: `http://daisy.uwaterloo.ca/SCG/MUG.html`

Bücher zu Maple: `www.maplesoft.com/books.html`

<u>Anmerkungen:</u>

1. Sie werden sicher einige Fehler finden. Wenn Sie mir diese mitteilen wollen oder Sie Kommentare haben, können Sie mir eine E-Mail schicken:

   `jweiss@rz.hs-bremen.de`

2. Diesen Text können Sie auch im Internet lesen, entweder mit dem Acrobat Reader (`IMAT1_Neu.PDF`) oder mit einem PostScript Viewer (`IMAT1_Neu.PS`). Beides finden Sie auf meiner Homepage:

   `www.hs-bremen.de/Deutsch/Frame.asp?PersID=81`

   Zum Lesen am Bildschirm ist der Acrobat Reader wegen der Querverweise besser geeignet.

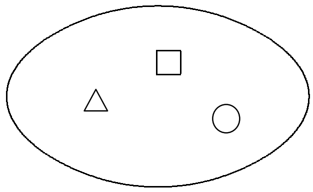
Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.1 Was ist eine Menge?

Definition: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von genau bestimmten, unterscheidbaren Dingen zu einem Ganzen. Diese Dinge heißen **Elemente** der Menge.

1.2 Mengendarstellung.



1.2.1 Graphisch

(Venn–Diagramm)

1.2.2 Aufzählend

$\mathcal{M} = \{\text{Aufzählung aller Elemente}\}$

Beispiel: $\mathcal{M} = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$

1.2.3 Beschreibend

$\mathcal{M} = \{\text{Eigenschaft}\}$

Beispiel: $\mathcal{M} = \{\text{Geometrische Figuren}\}$

oder $\mathcal{M} = \{x \mid x \text{ ist eine geometrische Figur}\}$

(gelesen: $\mathcal{M}$ ist die Menge aller x für die gilt: x ist eine geometrische Figur)

1.2.4 Zeichen

$\in, \notin$

Beispiel: $a \in \mathcal{A}$ (gelesen: a ist Element von $\mathcal{A}$
oder a gehört zur Menge $\mathcal{A}$
oder a ist enthalten in $\mathcal{A}$)

$a \notin \mathcal{A}$ (gelesen: a ist nicht Element von $\mathcal{A}$)

1.3 Mengengleichheit

Definition: Zwei Mengen sind genau dann **gleich**, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Zeichen: $=, \neq$

Beispiel: $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{A}$ (ist) gleich $\mathcal{B}$)
$\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ (gelesen: $\mathcal{M}$ (ist) ungleich $\mathcal{N}$)

1.4 Leere Menge

Definition: Es gibt eine Menge, die kein Element enthält. Sie heißt **leere Menge**.

Zeichen: $\mathcal{M} = \{\}$ (gelesen: $\mathcal{M}$ ist die leere Menge
oder $\mathcal{M}$ ist leer)

1.5 Teilmengen (Untermengen)

Definition: Eine Menge $\mathcal{M}_1$, die nur Elemente einer Menge $\mathcal{M}$ enthält, heißt **Teilmenge** (oder Untermenge) von $\mathcal{M}$.

Beispiel: $\mathcal{M}=\{1,\ a,\ K\}$ $\mathcal{M}_1=\{1,\ a\}$

Zeichen: $\subseteq, \subset, \nsubseteq, \not\subset$

Beispiele:	$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$	gelesen:	$\mathcal{M}_1$ ist Teilmenge von $\mathcal{M}$
	$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$		$\mathcal{A}_1$ ist echte Teilmenge von $\mathcal{A}$
	$\mathcal{B}_1 \nsubseteq \mathcal{B}$		$\mathcal{B}_1$ ist nicht Teilmenge von $\mathcal{B}$
	$\mathcal{D}_1 \not\subset \mathcal{D}$		$\mathcal{D}_1$ ist nicht echte Teilmenge von $\mathcal{D}$

Satz 1: Die leere Menge ist zu jeder Menge eine Teilmenge.
Satz 2: Die leere Menge hat nur sich selbst als Teilmenge.
Satz 3: Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Definition: Die Menge aller Teilmengen einer Menge $\mathcal{A}$ heißt **Potenzmenge** zu $\mathcal{A}$.

1.6 Klasseneinteilung (spezielle Bildung von Teilmengen)

Definition: Zerlegt man eine Menge derart in Teilmengen, dass jedes Element in genau einer Menge enthalten ist und keine Teilmenge leer ist, so heißt diese Mengenaufteilung eine **Klasseneinteilung**.

Beispiele: a) $\mathcal{M} = \{\ a,\ b,\ c\ \}$ $\mathcal{M}_1 = \{\ a,\ b\ \}$ $\mathcal{M}_2 = \{\ c\ \}$

b) $\mathcal{M} = \mathcal{Z} = \{\ x \mid x$ ist eine ganze Zahl$\}$
$\mathcal{M}_1 = \{\ x \mid x$ ist eine ungerade Zahl$\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\ x \mid x$ ist eine gerade Zahl$\}$

Gegenbeispiel: $\mathcal{M} = \mathcal{Z}$
$\mathcal{M}_1 = \{\ x \mid x$ ist durch 2 teilbar$\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\ x \mid x$ ist durch 3 teilbar$\}$

1.7 Mächtigkeit von Mengen (Äquivalenz)

Definition: Zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **gleichmächtig** (äquivalent), wenn jedem Element von $\mathcal{A}$ genau ein Element von $\mathcal{B}$ zugeordnet werden kann.

Zeichen: $\sim, \nsim$

Beispiele: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{A}$ ist gleichmächtig mit $\mathcal{B}$
oder $\mathcal{A}$ ist äquivalent zu $\mathcal{B}$)

$\mathcal{M} \nsim \mathcal{N}$ (gelesen: $\mathcal{M}$ ist nicht gleichmächtig mit $\mathcal{N}$)

1.8 Ergänzungsmenge

Definition: $\mathcal{A}$ sei eine Teilmenge der Grundmenge $\mathcal{M}$. Die Menge aller Elemente von $\mathcal{M}$, die nicht zu $\mathcal{A}$ gehören, bilden die **Ergänzungsmenge** $\overline{\mathcal{A}}$:
$\overline{\mathcal{A}} = \{\ x \mid x \in \mathcal{M}$ und $x \notin \mathcal{A}\}$

1.9 Mengenoperationen

1.9.1 Durchschnitt von Mengen

Definition: Der **Durchschnitt** zweier Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu $\mathcal{A}$ als auch zu $\mathcal{B}$ gehören:
$\mathcal{D} = \{\ x \mid x \in \mathcal{A}$ **und** $x \in \mathcal{B}\}$

Zeichen: $\cap$

Beispiel: $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{D}$ gleich Durchschnitt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
oder $\mathcal{D}$ gleich $\mathcal{A}$ geschnitten mit $\mathcal{B}$)

$\mathcal{A} = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}; \qquad \mathcal{B} = \{\ 1, 4, 7, 9\ \}$
$\Longrightarrow \qquad \mathcal{D} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\ 1, 4\ \}$

Satz 4: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$

Satz 5: Ist $\mathcal{A}$ Teilmenge von $\mathcal{B}$, so ist der Durchschnitt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleich $\mathcal{A}$ und umgekehrt:
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}$

Spezialfälle: $\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A} \qquad \mathcal{A} \cap \{\} = \{\}$

1.9.2 Vereinigung von Mengen

Definition: Die **Vereinigungsmenge** zweier Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die Menge aller Elemente, die zu $\mathcal{A}$ oder zu $\mathcal{B}$ (oder zu beiden) gehören:
$\mathcal{V} \ = \ \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\ x \mid x \in \mathcal{A}$ **oder** $x \in \mathcal{B}\}$

Zeichen: $\cup$

Beispiel: $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{V}$ gleich Vereinigung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
oder $\mathcal{V}$ gleich $\mathcal{A}$ vereinigt mit $\mathcal{B}$)

$\mathcal{A} = \{\ 1, 2, 6\ \}; \qquad \mathcal{B} = \{\ 1, 3, 4, 6\ \}$
$\Longrightarrow \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\ 1, 2, 3, 4, 6\ \}$

Anmerkung: Das deutsche Wort „oder“ ist im täglichen Sprachgebrauch nicht eindeutig. Es kann sein:

(a) „ausschließendes oder“ = „exklusives oder“:
$a \in \mathcal{A}$ oder $a \in \mathcal{B}$ aber a ist nicht Element von beiden

(b) „nichtausschließendes oder“ = „inklusives oder“:
$a \in \mathcal{A}$ oder $a \in \mathcal{B}$ oder a ist Element von beiden.

In der Mathematik ist stets das „**inklusive oder**“ gemeint, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt.

Satz 6: Ist $\mathcal{A}$ Teilmenge von $\mathcal{B}$, so ist die Vereinigungsmenge von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleich $\mathcal{B}$ und umgekehrt:
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$

1.9.3 Restmenge (Differenzmenge)

Definition: Unter der **Restmenge** (Differenzmenge) $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ zweier Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ versteht man die Menge aller Elemente von $\mathcal{A}$, die nicht zu $\mathcal{B}$ gehören:
$\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{\, x \mid x \in \mathcal{A} \text{ und } x \notin \mathcal{B}\}$

Zeichen: $\setminus$

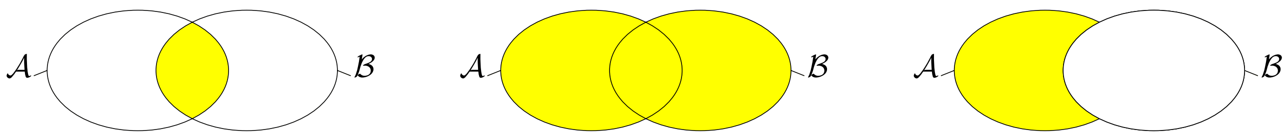
Beispiel: $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{D}$ gleich $\mathcal{A}$ ohne $\mathcal{B}$)

$$\mathcal{A} = \{\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5 \,\}; \qquad \mathcal{B} = \{\, 1,\, 4,\, 7,\, 9 \,\}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{\, 2,\, 3,\, 5 \,\}$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{\, 7,\, 9 \,\}$$

Spezialfälle: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{\}$; $\quad \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}}$ (Ergänzungsmenge)
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\} \Longrightarrow \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A}$; $\quad \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Zusammenfassung:

Durchschnitt $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ Restmenge $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$



1.10 Produktmenge

Aus den Elementen von zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bilden wir neue Elemente der Form (x, y) mit $x \in \mathcal{A}$ und $y \in \mathcal{B}$. Diese Elemente heißen **Paare**. Kommt es auf die Reihenfolge der Elemente an, so heißen die Paare „**geordnete Paare**“. Sie bestehen aus einer ersten und einer zweiten „**Komponente**“.

Definition: Unter der **Produktmenge** $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ von zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ versteht man die Menge aller geordneten Paare, bei denen die erste Komponente Element aus $\mathcal{A}$ und die zweite Komponente Element aus $\mathcal{B}$ ist:
$\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{A},\, y \in \mathcal{B}\}$

Zeichen: $\times$

Beispiel: $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (gelesen: $\mathcal{F}$ gleich $\mathcal{A}$ kreuz $\mathcal{B}$)

$$\mathcal{A} = \{\, 1,\, 2,\, 3,\, \}; \qquad \mathcal{B} = \{\, a, b \,\}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{\, (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \,\}$$

Satz: Enthält die Menge $\mathcal{A}$ m Elemente und die Menge $\mathcal{B}$ n Elemente, so enthält die Produktmenge $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $\quad N = m \cdot n$ Elemente.

2 Vektorrechnung

2.1 Einführung

In den Naturwissenschaften und der Technik gibt es verschiedene Größen:

a) **Skalare:** Sie lassen sich durch eine reelle Zahl (Maßzahl mit Maßeinheit) beschreiben.

Beispiele: Länge, Zeit, Masse, Temperatur

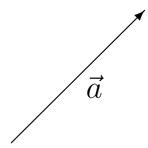
b) **Vektoren:** Sie erfordern neben der Angabe einer Maßzahl mit Maßeinheit noch die Angabe einer Richtung.

Beispiele: Kraft, Moment, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische oder magnetische Feldstärke

Die Maßzahl eines Vektors (Länge) heißt Betrag des Vektors.

2.2 Darstellung von Vektoren

Vektoren werden durch Pfeile dargestellt. Zur Bezeichnung werden kleine Buchstaben mit einem Pfeil darüber gewählt. Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ wird mit a oder $|\vec{a}|$ bezeichnet.

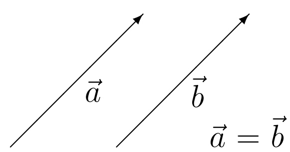


2.3 Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren heißen genau dann **gleich** ($\vec{a} = \vec{b}$), wenn sie in Betrag und Richtung (einschließlich Durchlaufsinn) übereinstimmen.

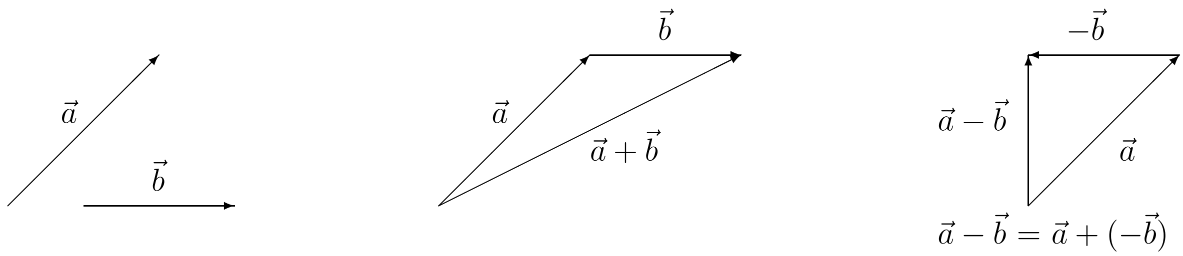
2.4 Freie Vektoren

Aus der Definition für Gleichheit von Vektoren folgt, dass auch zwei parallele gleichlange Vektoren gleich sind. Solche Vektoren heißen **freie Vektoren**.



Nicht alle oben genannten Vektorgrößen können durch freie Vektoren beschrieben werden. Eine an einem starren Körper angreifende Kraft darf z. B. nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, nicht aber parallel dazu (liniengebundener oder linienflüchtiger Vektor). Eine an einem nichtstarren Körper angreifende Kraft darf gar nicht verschoben werden (ortsgebundener Vektor).

2.5 Addition und Subtraktion



2.6 Multiplikation mit einem Skalar

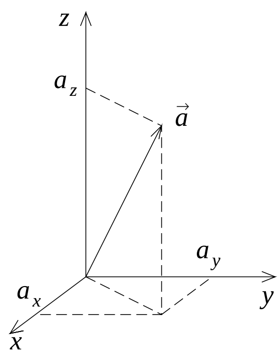
$$\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a} \iff \vec{a}\parallel\vec{b} \quad\wedge\quad |\vec{b}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}| \tag{1}$$

Für $\alpha>0$ sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichsinnig, für $\alpha<0$ gegensinnig parallel.

2.7 Darstellung in einem Koordinatensystem

Es wird ein kartesisches Koordinatensystem (Rechtshandsystem) gewählt und der Vektor parallel zu sich mit seinem Anfang in den Ursprung verschoben. Die Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen werden dann seine **Komponenten** genannt. Ein Vektor ist eindeutig durch seine Komponenten festgelegt. Die übliche Schreibweise ist

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \tag{2} \qquad \text{(Spaltenvektor)}$$



In dieser Darstellung gilt für Addition oder Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\pm b_x\\a_y\pm b_y\\a_z\pm b_z\end{pmatrix} \qquad \alpha\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_x\\\alpha\cdot a_y\\\alpha\cdot a_z\end{pmatrix} \tag{3}$$

Für den Betrag gilt: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ (4)

Ein Vektor $\vec{a}$ mit $|\vec{a}|=1$ heißt **Einheitsvektor**. Die Einheitsvektoren parallel zu den Koordinatenachsen werden mit $\vec{i},\vec{j}$ und $\vec{k}$ bezeichnet und heißen auch **Grundvektoren**.

Anmerkung: Es gibt technische Probleme, die zu ihrer Beschreibung Vektoren mit mehr als drei Komponenten erfordern (Statik, lineare Gleichungssysteme). Die Komponenten werden dann zweckmäßigerweise mit $a_1,a_2,\ldots,a_n$ bezeichnet.

Alle obigen Gleichungen sind dann entsprechend zu ergänzen, z. B.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \tag{5}$$

2.8 Linearkombination

Ein Vektor $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{a}_i$ mit $\alpha_i\in\mathcal{R}$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_i$.

Falls für gegebene Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{a}_i=\vec{0}$, (6) wobei nicht alle $\alpha_i = 0$ sind, so heißen diese Vektoren **linear abhängig**.

Satz: In der Ebene (im Raum) sind mehr als zwei (drei) Vektoren stets linear abhängig.

Falls $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ nur möglich ist, wenn für alle $\alpha_i = 0$ gilt, so heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

Satz: In der Ebene (im Raum) lässt sich jeder Vektor durch eine Linearkombination von zwei (drei) linear unabhängigen Vektoren darstellen.

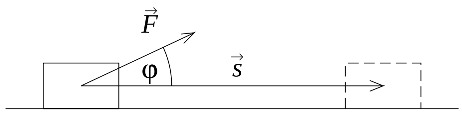
2.9 Skalarprodukt

Für die Arbeit einer Kraft, die längs eines geradlinigen Weges wirkt, gilt:

„Arbeit = Kraft × Weg"

Diese Gleichung gilt jedoch nur, wenn die Kraft parallel zur Verschiebung wirkt.

Bilden Kraft $\vec{F}$ und Weg $\vec{s}$ einen Winkel φ miteinander, so gilt für die Arbeit W das allgemeinere Gesetz:



$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi) \qquad (7)$$

Dafür schreibt man kurz: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ und nennt dieses Produkt aus zwei Vektoren **skalares Produkt**.
In Koordinatenschreibweise für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x \ + \ a_y \cdot b_y \ + \ a_z \cdot b_z \qquad (8)$$

Für das Skalarprodukt gilt das kommutative Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Das Skalarprodukt wird häufig dazu benutzt, den Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (9)$$

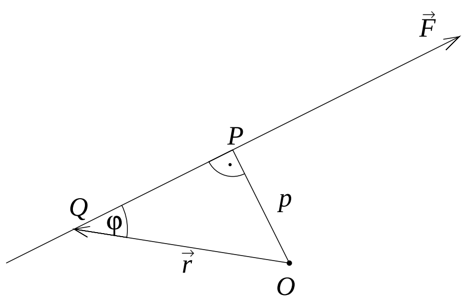
Für zwei zueinander senkrechte Vektoren gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2.10 Vektorprodukt

Für das statische Moment $\vec{M}$ einer Kraft $\vec{F}$ gilt:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot p \qquad (10)$$

wobei p der senkrechte Abstand des Aufpunktes O zur Wirkungslinie der Kraft ist.



Das statische Moment $\vec{M}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene steht. Für diesen Vektor schreibt man: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ und nennt das Produkt **Vektorprodukt** (oder Kreuzprodukt).

Allgemein gilt für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

1. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
2. $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtshandsystem
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

In Komponentenschreibweise gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - & a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - & a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - & a_y \cdot b_x \end{pmatrix} \quad (11) \qquad \text{oder} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_x & b_x \\ \vec{j} & a_y & b_y \\ \vec{k} & a_z & b_z \end{vmatrix} \quad (12)$$

Das Vektorprodukt ist antikommutativ:

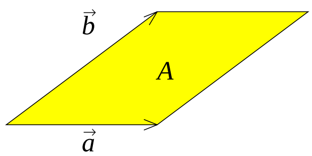
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} \quad (13)$$

Für parallele Vektoren gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (14)$$

Für die Fläche eines Parallelogramms, das von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:

$$A = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \quad (15)$$



2.11 Spatprodukt

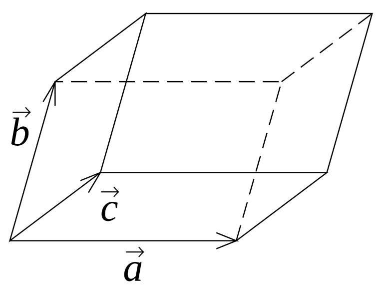
Das **Spatprodukt** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ berechnet das Volumen V eines Parallelepipeds (Prisma), dessen drei von einem Punkt ausgehende Kanten durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ beschrieben werden.

Es gilt: $$V = |\,\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\,| \quad (16)$$

Für das Spatprodukt gilt die allgemeine Beziehung:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (17)$$

(zyklische Vertauschung)

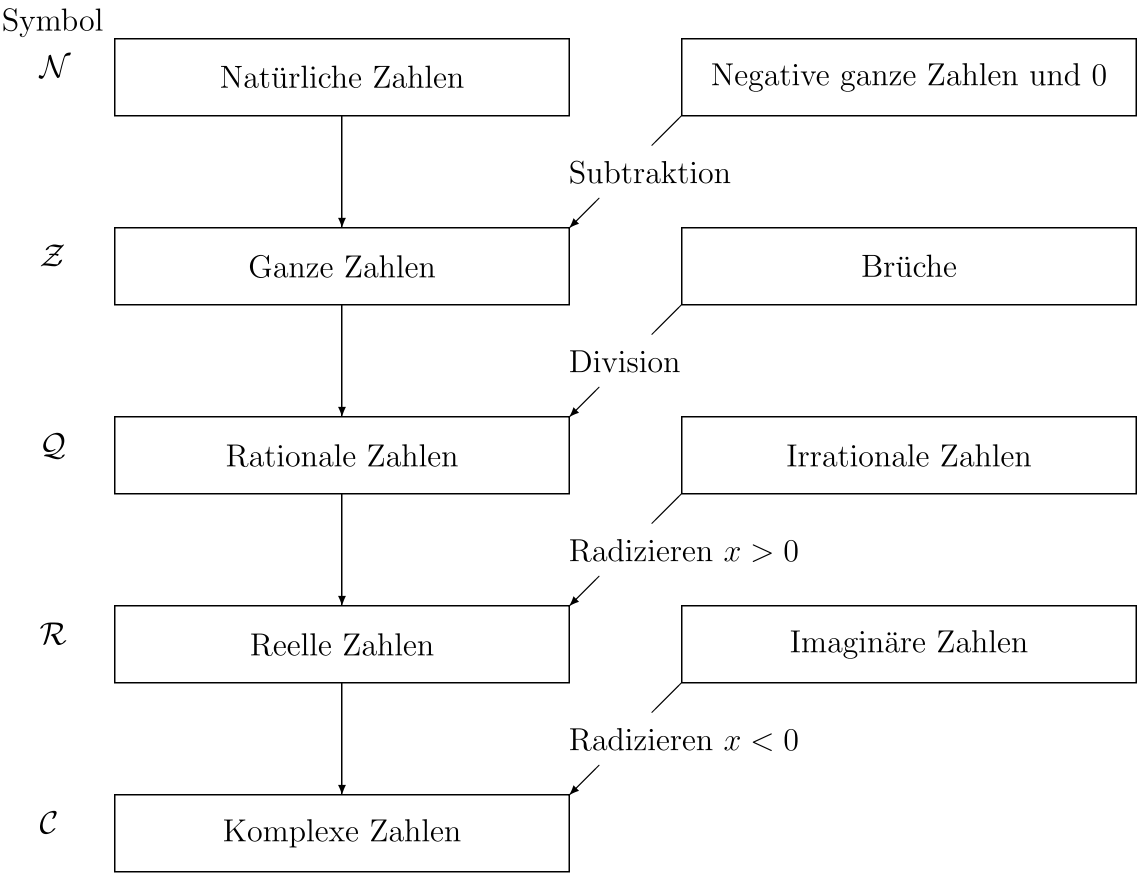


Das Spatprodukt lässt sich auch als Determinante schreiben:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad (18)$$

3 Zahlenaufbau und Rechengesetze

3.1 Zahlenaufbau



3.2 Stellenwertsysteme

Mit dem bei uns gebräuchlichen Dezimalsystem kann mit Hilfe von 10 Ziffern jede Zahl dargestellt werden. Dies gelingt dadurch, dass jeder Ziffer ein Stellenwert zugeordnet wird. Für die Zahl 752 ist z. B. vereinbart:

$$752 = 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Die Zahl 10 heißt **Basis** des **Stellenwertsystems**. Als Basis eignet sich auch jede andere natürliche Zahl $a > 1; a \in \mathcal{N}$.

Gebräuchlich sind $a = 2$ (Dualsystem), $a = 8$ (Oktalsystem) und $a = 16$ (Hexadezimalsystem). Diese Systeme eignen sich besonders für elektronische Rechner.
Im Dualsystem bedeutetet z. B.

$$100101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 37_{10}$$

Oder im Hexadezimalsystem:

$$ABC_{16} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2748_{10}$$

3.3 Umwandlung von einem Stellenwertsystem in ein anderes

Das unten angegebene Verfahren eignet sich zur Umwandlung der Ziffernfolge einer Zahl n im System mit der Basis a in die Ziffernfolge dieser Zahl n mit der Basis b.

Das Verfahren eignet sich für beliebige Basen a und b. Die praktische Verwendbarkeit ist jedoch dadurch beschränkt, dass man die Rechengesetze im System a nicht beherrscht.

Verfahren: Die Zahl n wird fortgesetzt durch die Zahl b dividiert (mit Rest) bis sich 0 ergibt. Die jeweiligen Reste werden von rechts nach links notiert. Die so entstandene Ziffernfolge ist die Darstellung der Zahl n im System mit der Basis b.

Das Verfahren wird mit $a = 10$ an zwei Beispielen erläutert.

1. Beispiel: $n = 185;\ b = 2$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccl}
 & & & & & & & & & & & & & \xleftarrow{\text{Ergebnis}} & & & & \\
0 & \leftarrow & 1 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 5 & \leftarrow & 11 & \leftarrow & 23 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 92 & \leftarrow & 185 & \text{Division durch 2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & \text{Rest}
\end{array}$$

Es ist also: $185_{10} = 10111001_2$

2. Beispiel: $n = 185;\ b = 8$

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & & & \xleftarrow{\text{Ergebnis}} & & & \\
0 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 23 & \leftarrow & 185 & \text{Division durch 8} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & 2 & & 7 & & 1 & \text{Rest}
\end{array}$$

Es ist also: $185_{10} = 271_8$

Für die Umwandlung von einem System mit der Basis a in das Dezimalsystem ($b = 10$) eignet sich besser eine Umkehrung des obigen Verfahrens: statt fortgesetzt durch b zu dividieren, wird fortgesetzt mit a multipliziert und eine Ziffer addiert.

Das Verfahren wird mit den Zahlen des ersten Beispiels erläutert und begründet:

$$\begin{aligned}
10111001 &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= (((((((0{+}1){\cdot}2{+}0){\cdot}2{+}1){\cdot}2{+}1){\cdot}2{+}1){\cdot}2{+}0){\cdot}2{+}0){\cdot}2{+}1
\end{aligned}$$

Diese Folge von Additionen und Multiplikationen lässt sich bequem mit dem folgenden Schema durchführen:

Horner-Schema:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & \leftarrow \text{ Ziffernfolge von } n \\
0 & & 2 & & 4 & & 10 & & 22 & & 46 & & 92 & & 184 & & \downarrow \;=\; + \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
1 & & 2 & & 5 & & 11 & & 23 & & 46 & & 92 & & 185 & & \nearrow \;=\; \cdot\ 2
\end{array}
$$

3.4 Beträge

$$
\mid a \mid \;=\; \sqrt{a^2} \;=\; \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases} \tag{1}
$$

$$
\mid a \pm b \mid \;\leq\; \mid a \mid + \mid b \mid \qquad (\textbf{Betragsungleichung}) \tag{2}
$$

$$
\mid a \cdot b \mid \;=\; \mid a \mid \cdot \mid b \mid \tag{3}
$$

$$
\left| \frac{a}{b} \right| \;=\; \frac{\mid a \mid}{\mid b \mid} \tag{4}
$$

3.5 Brüche

Addition/Subtraktion:
$$
\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} \;=\; \frac{p \cdot s \pm q \cdot r}{q \cdot s} \tag{5}
$$

Multiplikation:
$$
\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \;=\; \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \tag{6}
$$

Division:
$$
\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} \;=\; \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} \tag{7}
$$

3.6 Periodische Dezimalbrüche

Beispiel: $a = 2.7\overline{34}$

$$
\begin{array}{rl}
1000\ a = & 2734.\overline{34} \\
-\ 10\ a = & 27.\overline{34} \\
\hline
990\ a = & 2707 \Rightarrow \qquad a = \dfrac{2707}{990}
\end{array}
$$

3.7 Potenzen

Sei $n \in \mathcal{N}; \quad a \in \mathcal{R}$

Definition:

$$
a^n = \begin{cases} a & : \quad n = 1 \\ a \cdot a^{n-1} & : \quad n > 1 \end{cases}
$$

$$
a^{-n} = \frac{1}{a^n}
$$

$$
a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0 \qquad (0^0 \text{ ist nicht definiert})
$$

3.8 Wurzeln

Sei $\quad a > 0; \quad n \in \mathcal{Z}; \quad n \neq 0; \quad a \in \mathcal{R}$

Definition: $\quad w = \sqrt[n]{a} \qquad \Longrightarrow \qquad w^n = a; \qquad w \geq 0$

(**Anmerkung**: Nach dem 5. Potenzgesetz (s. u.) lassen sich Wurzeln völlig vermeiden: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$)

3.9 Logarithmen

Sei $\quad a, \ x \in \mathcal{R}; \quad x > 0; \quad a > 0; \quad a \neq 1$

Definition: $\quad y = \log_a(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$

$y =$ Logarithmus (Exponent)
$a =$ Basis
$x =$ Numerus (Logarithmand)

3.10 Potenzgesetze $(a, b > 0)$

$$\mathbf{1.} \quad a^r \cdot a^t = a^{r+t} \tag{8}$$
$$\mathbf{2.} \quad a^r \div a^t = a^{r-t} \tag{9}$$
$$\mathbf{3.} \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \tag{10}$$
$$\mathbf{4.} \quad a^r \div b^r = (a/b)^r \tag{11}$$
$$\mathbf{5.} \quad (a^r)^t = a^{r \cdot t} \tag{12}$$

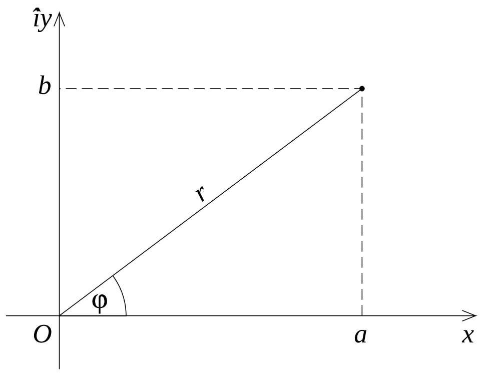
3.11 Logarithmengesetze $(u, v > 0)$

$$\mathbf{1.} \quad \log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \tag{13}$$
$$\mathbf{2.} \quad \log_a(u/v) = \log_a(u) - \log_a(v) \tag{14}$$
$$\mathbf{3.} \quad \log_a(u^t) = t \cdot \log_a(u) \tag{15}$$
$$\mathbf{4.} \quad 1 = \log_a(b) \cdot \log_b(a) \tag{16}$$

3.12 Komplexe Zahlen

Neue Zahl $\hat{\imath}$ mit: $\hat{\imath}^2 = \; -1$
Sei $z_1 \;=\; a \;+\; \hat{\imath} \cdot b$
$z_2 \;=\; c \;+\; \hat{\imath} \cdot d$

Gaußsche Zahlenebene



Definitionen:

$$z_1 \pm z_2 \;=\; (a \pm c) + \hat{\imath} \cdot (b \pm d) \tag{17}$$

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (a \cdot c - b \cdot d) + \hat{\imath} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \tag{18}$$

$$z_1 \div z_2 \;=\; \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + \hat{\imath} \cdot \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \tag{19}$$

Betrag: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.12.1 Goniometrische Form

$$z \;=\; r \cdot (\cos(\varphi) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi)) \tag{20}$$

Multiplikation und Division lassen sich in der goniometrischen Form besonders leicht ausführen:
Sei $z_1 \;=\; r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi_1))$
$z_2 \;=\; r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi_2))$

$$\Longrightarrow \quad z_1 \cdot z_2 \;=\; r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{21}$$

$$z_1 \div z_2 \;=\; \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{22}$$

3.12.2 Exponentialform

Definition:

$$e^{\hat{\imath} \cdot \varphi} \;=\; \cos(\varphi) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi) \tag{23}$$

Dann ist

$$z \;=\; r \cdot (\cos(\varphi) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{\hat{\imath} \cdot \varphi} \tag{24}$$

Auf $e^{\hat{\imath} \cdot \varphi}$ lassen sich die Potenzgesetze anwenden: z.B.

$$e^{\hat{\imath} \cdot \varphi_1} \cdot e^{\hat{\imath} \cdot \varphi_2} \;=\; e^{\hat{\imath} \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{25}$$

$\Rightarrow$ (Formel von Moivre)

$$z^n \;=\; (r \cdot e^{\hat{\imath} \cdot \varphi})^n \;=\; r^n \cdot e^{\hat{\imath} \cdot n \cdot \varphi} \;=\; r^n \cdot (\cos(\varphi \cdot n) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi \cdot n)) \tag{26}$$

$$z^{1/n} = (r \cdot e^{\hat{\imath} \cdot \varphi})^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{\hat{\imath} \cdot \varphi / n} = r^{1/n} \cdot (\cos(\varphi / n) + \hat{\imath} \cdot \sin(\varphi / n)) \tag{27}$$

3.12.3 Konjugiert komplex

$$z \;=\; x + \hat{\imath} \cdot y \qquad \Rightarrow \bar{z} \;=\; x - \hat{\imath} \cdot y \qquad \Rightarrow z \cdot \bar{z} \;=\; |\, z \,|^2 \tag{28}$$

4 Gleichungen und Ungleichungen

Nahezu alle Probleme in Naturwissenschaft und Technik werden durch Gleichungen oder Ungleichungen beschrieben, deren Lösung daher von zentraler Bedeutung ist.
Wir unterscheiden Gleichungen (Ungleichungen) einerseits nach der Zahl der vorkommenden Unbekannten (Variablen), andererseits nach der Form der Gleichung (Ungleichung), z. B. linear, quadratisch, etc. Lediglich für lineare Gleichungssysteme gibt es für eine beliebige Anzahl von Variablen allgemein gültige Lösungsverfahren. Für Gleichungen mit einer Variablen gibt es Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen bis zum Grade vier.
Für alle anderen Fälle gibt es nur in Spezialfällen geschlossene Lösungen. Meistens werden die Lösungen näherungsweise durch geeignete iterative Verfahren ermittelt (z. B. Newton–Raphson–Iteration).

4.1 Allgemeines zu Gleichungen (Ungleichungen)

Eine Gleichung mit einer Variablen hat im allgemeinen die Form

$$\text{Term1} = \text{Term2}$$

wobei ein Term ein aus Zahlen, Buchstaben und Rechensymbolen (Operatoren) gebildeter Ausdruck ist. Da die Differenz zweier Terme wieder ein Term ist, lässt sich eine Gleichung immer auf die Form

$$\text{Term} = 0$$

bringen.
Das Problem der Lösung einer Gleichung ist daher gleichwertig dem Problem der Nullstellenbestimmung von Termen (Gleichungen).
Zwei Gleichungen (Ungleichungen) oder Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.
Zur Lösung von Gleichungen werden diese umgeformt. Bei diesen Umformungen ist darauf zu achten, dass sich die Lösungsmengen nicht verändern (**Äquivalenzumformungen**); gegebenenfalls sind Fallunterscheidungen vorzunehmen.

Äquivalenzumformungen sind:

(a) Addition oder Subtraktion von beliebigen Zahlen oder Termen auf beiden Seiten der Gleichung (Ungleichung)

(b) Multiplikation oder Division mit einer Zahl oder einem Term **ungleich Null**.
Bei Ungleichungen ist darauf zu achten, dass sich bei Multiplikation oder Division mit negativen Zahlen oder Termen das Relationszeichen umkehrt.

4.2 Einteilung der Gleichungen (Ungleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathcal{R};\ n \in \mathcal{N};\ a_n \neq 0 \tag{1}$$

(oder eine ihr äquivalente Gleichung) heißt **algebraische Gleichung**, n heißt dabei **Grad** der Gleichung.
Alle anderen Gleichungen heißen **transzendent**.

Algebraische Gleichungen mit $n = 1$ heißen **linear**, mit $n = 2$ **quadratisch** und mit $n = 3$ **kubisch**.

4.3 Lineare Gleichungen

Für lineare Gleichungssysteme gibt es allgemein gültige Lösungsverfahren (Algorithmen). Daher werden auch viele nicht–lineare Gleichungen angenähert (linearisiert), um zu Lösungen zu kommen. Bei linearen Gleichungssystemen gibt es zwei Unterscheidungsmerkmale

(a) Anzahl der Variablen

(b) Anzahl der Gleichungen

Da in der Technik auch Gleichungen mit sehr vielen Variablen vorkommen, hat sich die „Matrix–Schreibweise“ weitgehend durchgesetzt. Insbesondere beim Einsatz von programmierbaren Rechnern ist die Matrixschreibweise unerlässlich.

4.3.1 Matrix–Darstellung

Ein lineares Gleichungssystem mit m Variablen und n Gleichungen hat die Form

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \tag{2}$$

Das Gleichungssystem ist dabei durch die **Koeffizienten** $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}$ und die rechten Seiten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vollständig bestimmt, denn die Rechensymbole sind bei allen Gleichungssystemen gleich und die Bezeichnung der Variablen ist unbedeutend.

Die Koeffizienten werden zu einer **Matrix** (rechteckiges Schema) zusammengefasst:

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{3}$$

und die rechten Seiten und die Variablen zu je einem **Vektor** (Spaltenvektor):

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Für das Gleichungssystem (2) wird dann geschrieben

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} \;=\; \vec{b} \tag{5}$$

Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn $m = n$ gilt, andernfalls heißt sie **rechteckig**. Ein lineares Gleichungssystem hat genau dann einen eindeutig bestimmten Lösungsvektor $\vec{x}$, wenn die zugehörige Matrix quadratisch ist **und** ihre **Determinante** ungleich Null ist.
Zur Lösung von Gleichungssystemen werden jedoch Determinanten **nicht** benötigt.

4.3.2 Determinanten

Determinanten sind nur für quadratische Matrizen definiert. Zu einer zweireihigen quadratischen Matrix ($n = 2$)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

definieren wir eine **Determinante** (reelle Zahl):

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{7}$$

Zur Definition und Berechnung von Determinanten für $n > 2$ kann der sogenannte **Entwicklungssatz** benutzt werden:

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \tag{8}$$

mit

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{a_{i2}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(Die } i\text{-te Zeile und die } j\text{-te Spalte werden gestrichen)} \tag{9}$$

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Entwicklung nach Zeile 1:

$$\begin{aligned} |\ \mathbf{A}\ | &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (5 - 12) - 2 \cdot (4 - 24) \ + \ 3 \cdot (8 - 20) \ = \ -\ 3 \end{aligned}$$

Entwicklung nach Zeile 2:

$$\begin{aligned} |\ \mathbf{A}\ | &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (2 - 6) + 5 \cdot (1 - 12) - 6 \cdot (2 - 8) \ = \ -\ 3 \end{aligned}$$

Eine Entwicklung ist ebenfalls nach Spalten möglich, z. B. nach Spalte 2

$$\begin{aligned} |\ \mathbf{A}\ | &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (4 - 24) + 5 \cdot (1 - 12) - 2 \cdot (6 - 12) = -3 \end{aligned}$$

Zur Berechnung von Determinanten größerer Matrizen sollten die Determinanten vor Anwendung des Entwicklungssatzes mit Hilfe folgender Regeln umgeformt werden:

1. Ein gemeinsamer Faktor einer Zeile (oder Spalte) kann vor die Determinante gezogen werden.
2. Zu einer Zeile (Spalte) kann das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte) addiert werden.

Regel 2 am obigen Beispiel: (4 mal Zeile 1 subtrahiert / Zeile 2 subtrahiert)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \tag{10}$$

(Dann Entwicklung nach Spalte 1)

4.3.3 Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme

4.3.3.1 Cramersche Regel

Die **Cramersche Regel** ist sehr elegant in der Formulierung der Lösung, für praktische Zwecke jedoch allenfalls noch bis zu drei Variablen anzuwenden, da der Rechenaufwand sehr stark mit wachsender Zahl der Variablen steigt.

Die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist nach der Cramerschen Regel:

$$x_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l}\text{(Die } i\text{-te Spalte ist} \\ \text{durch die rechte} \\ \text{Seite ersetzt)}\end{array} \tag{11}$$

Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{array}{rcrcl} 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & = & 1 \\ 4 \cdot x_1 & - & x_2 & = & 9 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-27}{-2-12} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{18-4}{-14} = -1$$

4.3.3.2 Gaußscher Algorithmus

Für praktische Rechnungen eignet sich besonders das Gaußsche Eliminationsverfahren. Bei diesem Verfahren wird durch geeignete Addition von Vielfachen einer oben stehenden Zeile zu den darunterstehenden Zeilen das quadratische Schema (2) $(n = m)$ in ein dreieckiges Schema überführt:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & r_1 \\ & & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2m}x_n & = & r_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & b_{nn}x_n & = & r_n \end{array} \tag{12}$$

Die x_i können nun aus diesem Schema beginnend mit x_n schrittweise berechnet werden.

Beispiel für $n = 4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & - & x_3 & + & 4 \cdot x_4 & = & 7 \\ -3 \cdot x_1 & - & 5 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & - & 4 \cdot x_4 & = & -5 \\ 4 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$
\Longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & 3 & -1 & 4 & 7 & \\
 & -1 & 1 & 10 & 21 & \text{2 mal Zeile 2 plus 3 mal Zeile 1} \\
 & -7 & 9 & -12 & -17 & \text{2 mal Zeile 3 minus Zeile 1} \\
 & -3 & 4 & -7 & -11 & \text{Zeile 4 minus 2 mal Zeile 1} \\
\hline
 & & 2 & -82 & -164 & \\
 & & 1 & -37 & -74 & \\
\hline
 & & & 4 & 8 &
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad x_4 = 2; \quad x_3 = 0; \quad x_2 = -1; \quad x_1 = 1$$

Die eingerahmten Zeilen bilden das Dreiecksschema (12).

4.4 Nichtlineare Gleichungen mit einer Variablen

4.4.1 Algebraische Gleichungen

4.4.1.1 n = 2: Quadratische Gleichung

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad a_2 \neq 0 \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + p \cdot x + q = 0 \qquad p = \frac{a_1}{a_2}; \quad q = \frac{a_0}{a_2}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{1;\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diese sogenannte (p–q)–Formel ist elegant, aber nicht für alle Fälle gut geeignet zur Berechnung **beider** Lösungen, wie das Beispiel mit $p = 10^{10}$ und $q = 1$ zeigt:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -10^{10} \quad \text{(mit 12 Stellen Genauigkeit)}$$

Wegen $x_1 \cdot x_2 = q$ sollte x_2 wie oben, aber x_1 aus

$$x_1 = \frac{q}{x_2} = -10^{-10}$$

Diese Lösung erfüllt die Gleichung mit 10^{-20}, während der Fehler für $x_1 = 0$ immerhin 1 beträgt!

4.4.1.2 n > 2

Obwohl es für $n = 3$ und $n = 4$ exakte Verfahren zur Lösung gibt, werden wir diese Lösungen im allgemeinen nicht verwenden, da sie recht komplex sind.

Eine weitverbreitete und effektive Methode ist die **Ratemethode**. Es wird eine Lösung (Nullstelle) geraten oder näherungsweise berechnet und damit die Gleichung so umgeformt, dass ihr Grad um eins vermindert wird. Es gilt nämlich der allgemeine

Satz: Sei x_1 Lösung zu $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

Dann gilt:
$$\begin{aligned} & a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 = \\ & (x - x_1) \cdot (b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0) \end{aligned} \tag{14}$$

Die neuen Koeffizienten b_i werden am besten mit dem **Horner–Schema** berechnet.

Beispiel: $x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0; \qquad x_1 = 1$

$$\begin{array}{ll|rrrrl} & +\downarrow & 1 & -2 & -5 & 6 & \text{Koeffizienten } a_i \\ & & 0 & 1 & -1 & -6 & \\ \hline *x_1 & \underbrace{1}_{x_1} & \multicolumn{3}{l}{\underbrace{1 \quad -1 \quad -6}_{b_i}} & \underbrace{0} & \text{Wert der linken Seite für } x = x_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6) = (x - 1)(x^2 - x - 6) \\ \Longrightarrow \quad & \text{Weitere Lösungen}: \quad x_{2;\,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 0.5 \pm 2.5 \\ \Longrightarrow \quad & \mathcal{L} = \{1,\ 3, -2\} \end{aligned}$$

4.4.1.3 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen werden durch geeignete Potenzierung in algebraische Gleichungen umgeformt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass sich die Lösungsmenge ändern kann. Bei Wurzelgleichungen ist daher die Probe unerlässlich.

Beispiel:

$$\begin{array}{lllcl} & & \sqrt{x+5} - \sqrt{2 \cdot x + 3} - 1 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & & \sqrt{x+5} & = & \sqrt{2 \cdot x + 3} + 1 \\ \Longrightarrow & \text{(quadrieren)} & x + 5 & = & 2 \cdot x + 3 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot x + 3} + 1 \\ \Longleftrightarrow & & 1 - x & = & 2 \cdot \sqrt{2 \cdot x + 3} \\ \Longrightarrow & \text{(quadrieren)} & 1 - 2 \cdot x + x^2 & = & 4 \cdot (2 \cdot x + 3) \\ \Longleftrightarrow & & x^2 - 10 \cdot x - 11 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & & x_{1;\,2} & = & 5 \pm \sqrt{25 + 11} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \{11, -1\} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{11+5} - \sqrt{2 \cdot 11 + 3} - 1 = 4 - 5 - 1 & = & -2 \qquad \text{(keine Lösung)} \\ \sqrt{-1+5} - \sqrt{2 \cdot (-1) + 3} - 1 = 2 - 1 - 1 & = & 0 \checkmark \qquad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \{-1\} \end{array}$$

4.4.2 Transzendente Gleichungen

Transzendente Gleichungen werden im allgemeinen näherungsweise gelöst. Für spezielle Fälle lassen sich jedoch geschlossene Lösungen angeben.

4.4.2.1 Exponentialgleichungen

$$a^x = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \qquad (a \neq 1;\ a > 0) \tag{15}$$

Allgemeinere Exponentialgleichungen müssen auf die Form (15) gebracht werden. Für die Umformungen ist dabei häufig eine Substitution von Nutzen.
Beispiel:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 2 \cdot e^x - 3 \cdot e^{-x} - 1 & = & 0 & \text{Substitution}:\ y = e^x \\
\Longleftrightarrow & 2 \cdot y \ - 3 \cdot y^{-1} - 1 & = & 0 & \mid * y \\
\Longleftrightarrow & 2 \cdot y^2 - 3 \qquad - y & = & 0 & \\
 & y_{1;\ 2} & = & \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} & = \ \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}
\end{array}$$

Wegen $y = e^x > 0$ folgt

$$e^x = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \ln(1.5) = 0.4055 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \{0.4055\}$$

4.4.2.2 Logarithmische Gleichungen

$$\log_a(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^b \qquad (a \neq 1;\ a, x > 0) \tag{16}$$

4.4.2.3 Goniometrische Gleichungen

Gleichungen, in denen die Variable x als Argument einer trigonometrischen Funktion (sin, cos) vorkommt, heißen goniometrische Gleichungen. Wegen des Zusammenhangs von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ über

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{17}$$

lassen sich rein gonimetrische Gleichungen (bei denen die Variable x nur als Argument einer trigonometrischen Funktion vorkommt) in algebraische Gleichungen umformen. Das ist jedoch nicht immer zweckmäßig, da algebraische Gleichungen höheren Grades ebenfalls schwierig zu lösen sind.

Die Lösungsmenge goniometrischer Gleichungen ist wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen stets unendlich. Man beschränkt sich daher meistens auf ein Intervall der Länge $2 \cdot \pi$.
Die einfachsten goniometrischen Gleichungen der Form

$$\sin(x) = a \tag{18}$$

sind mit den heutigen Taschenrechnern sehr einfach zu lösen

$$x = \arcsin(a) \qquad (|a| \leq 1) \tag{19}$$

Durch geeignete Umformungen bringt man die goniometrische Gleichung auf eine zu Gleichung (18) äquivalente Form

$$F(x) = a \tag{20}$$

wobei F eine der drei Funktionen sin, cos oder tan ist.

Zur Umformung von goniometrischen Gleichungen werden vor allem benötigt:

Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Additionstheoreme: $\sin(a \pm x) = \sin(a) \cdot \cos(x) \pm \cos(a) \cdot \sin(x)$
$\cos(a \pm x) = \cos(a) \cdot \cos(x) \mp \sin(a) \cdot \sin(x)$ (s. 5.4)

Der Umformung einer goniometrischen Gleichung in eine algebraische Gleichung mit Hilfe von (17) ist häufig eine Umformung mit einem der Additionstheoreme vorzuziehen und die Hilfswinkelmethode anzuwenden.

Die **Hilfswinkelmethode** eignet sich für Gleichungen der Form

$$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = c \qquad (c^2 \leq a^2 + b^2, \text{ sonst keine Lösung}) \tag{21}$$

Die Zahlen a und b werden als kartesische Koordinaten eines Punktes angesehen und in Polarkoordinaten umgerechnet:

$$a = r \cdot \cos(\varphi); \quad b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Daraus lassen sich der Radius r und der Hilfswinkel φ eindeutig bestimmen:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{atan2}(b,\ a)$$ (s. 6.2)

Gleichung (21) lässt sich dann folgendermaßen umformen:

$$r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(x) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(x) = r \cdot \sin(x + \varphi) = c$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{r}$$

Dies ist eine zu Gleichung (18) äquivalente Form.

Beispiel: $2 \cdot \sin(x) - \cos(x) = 1; \qquad x \in]-\pi \ldots \pi]$

a) Lösung durch Umformung in eine algebraische Gleichung:

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \quad \Longrightarrow \quad & 2 \cdot \sin(x) - \sqrt{1 - \sin^2(x)} - 1 = 0 \\
& 4 \cdot \sin^2(x) - 4 \cdot \sin(x) + 1 = 1 - \sin^2(x) \\
& 5 \cdot \sin^2(x) - 4 \cdot \sin(x) = 0 \\
& \sin(x) \cdot (5 \cdot \sin(x) - 4) = 0 \\
& \sin(x) = 0 \ \vee \ \sin(x) = 0.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aus} \quad & \sin(x) = 0 && \Longrightarrow \quad x = 0 && \vee \quad x = \pi \\
& \sin(x) = 0.8 && \Longrightarrow \quad x = 0.9273 && \vee \quad x = \pi - 0.9273
\end{aligned}$$

Wegen des Quadrierens bei der Umformung kann sich die Lösungsmenge verändert haben. Durch die Probe werden zwei von den vier gefundenen Lösungen ausgeschieden.
$\Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \{0.9273,\ \pi\}$

b) Lösung mit der Hilfswinkelmethode:

$$a = 2; \quad b = -1 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{5}; \quad \varphi = -0.4636$$
$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$$
$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (x+\varphi) = 0.4636 \quad \vee \quad (x+\varphi) = \pi - 0.4636 \\
&\Longrightarrow \quad x = 0.9273 \quad \vee \quad x = \pi \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \{0.9273,\ \pi\}
\end{aligned}$$

4.4.3 Numerische Lösungen

Für eine beliebige Gleichung
$$f(x) = 0$$
gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Verfahren zu ihrer Lösung:

- Ohne Benutzung der Ableitung $f'(x)$.
- Unter Verwendung von $f'(x)$.

4.4.3.1 Ableitungsfreie Verfahren

Die beiden folgenden Verfahren setzen voraus, dass zwei Stellen a und b vorhanden sind mit
$$f(a) \cdot f(b) \leq 0$$
Dann finden die Verfahren im Intervall $[a, b]$ auf jeden Fall eine Näherung für eine Nullstelle, vorausgesetzt $f(x)$ ist stetig.
Bei beiden Verfahren wird vorab geprüft, ob $f(a) \cdot f(b) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $x = a$ oder/und $x = b$ eine Nullstelle.

- **Intervallhalbierung**

Der folgende Algorithmus lässt sich mit wenig Aufwand programmieren, er konvergiert aber auch nicht besonders schnell.

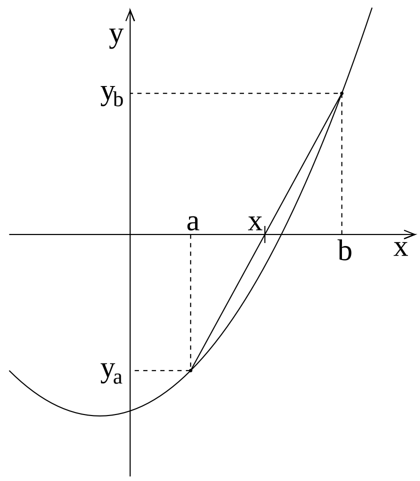
Algorithmus: α) Start: $y_a = f(a), \quad y_b = f(b)$

β) $x = \dfrac{a+b}{2}, \quad y = f(x)$
Falls $y = 0: \quad \Rightarrow \quad x$ ist Lösung.
Sonst

Falls $y \cdot y_a < 0 \quad \Rightarrow \quad b = x$
sonst $\quad a = x$

γ) Falls $|y| < \varepsilon$ oder $|b - a| < \delta \quad \Rightarrow$ Lösung x
sonst Fortsetzung bei β.

- **Regula falsi (modifiziert)**



Die Steuerung des Verfahrens ist grundsätzlich wie bei der Intervallhalbierung, jedoch die Berechnung von x in Teil β) ist anders:

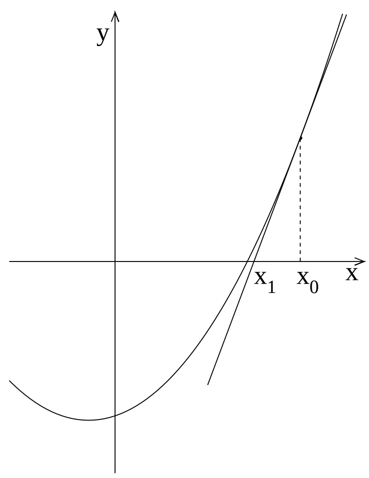
β) x ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von (a, y_a) und (b, y_b) mit der x–Achse:
$$\frac{a-x}{y_a} = \frac{b-x}{y_b} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = b - \frac{b-a}{y_b - y_a} \cdot y_b} \qquad (*)$$

und die Werte y_a und y_b müssen entsprechend gesetzt werden.

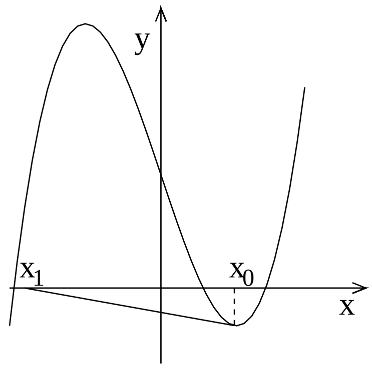
Dieses Verfahren konvergiert schnell, wenn die Anfangsnäherung nahe der Nullstelle ist. Bei Funktionen wie $f(x) = e^x - 1$ und $a = -10, \quad b = 10$ benötigt das Verfahren aber viele Schritte, um in die Nähe der Nullstelle zu kommen. Für den ersten Näherungswert x_1 ergibt sich nämlich:
$$x_1 = -9.9991$$
Man beachte, dass bei der Intervallhalbierung die Werte y_a und y_b nicht verändert werden. Beim modifizierten Verfahren wird in Formel $(*)$ y_b durch $y_b/2$ ersetzt, wenn zweimal hintereinander $a = x$ gesetzt wurde.

4.4.3.2 Newtonverfahren



Das Newtonverfahren wird mit einer „nullten" Näherung x_0 gestartet und dann werden der Reihe nach folgende (bessere) Näherungen berechnet (Schnitt der Tangente mit der x–Achse):
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
bis entweder $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ oder $|f(x_i)| < \varepsilon$ erreicht ist.

Das Newtonverfahren konvergiert sehr schnell, wenn x_0 in der Nähe der Nullstelle ist, aber es kann leicht versagen:



- $f'(x_i) = 0$.
- x_i liegt außerhalb des Definitionsgebiets von f.
- Die gefundene Nullstelle ist nicht die gesuchte, denn sie kann „weit weg" von x_0 liegen, obwohl es in der Nähe von x_0 wenigstens eine gibt.

5 Trigonometrie

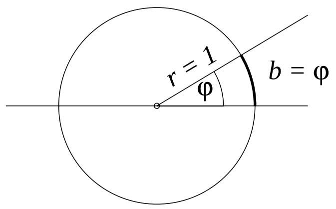
5.1 Winkelmessung und Winkeleinheiten

Zur Messung eines Winkels sind drei Einheiten gebräuchlich. Sei φ_0 der Vollwinkel, dann gelten die Beziehungen:

1. Gradmaß: $\varphi_0 = 360°;\ 1° = 60';\ 1' = 60''$ (Grad, Minute, Sekunde)
2. Bogenmaß: $\varphi_0 = 2 \cdot \pi$ (rad) (Radiant, keine weitere Unterteilung)
3. Neugrad: $\varphi_0 = 400^g;\ 1^g = 100^c;\ 1^c = 100^{cc}$ (Neugrad-Gon, Neuminute, Neusekunde)

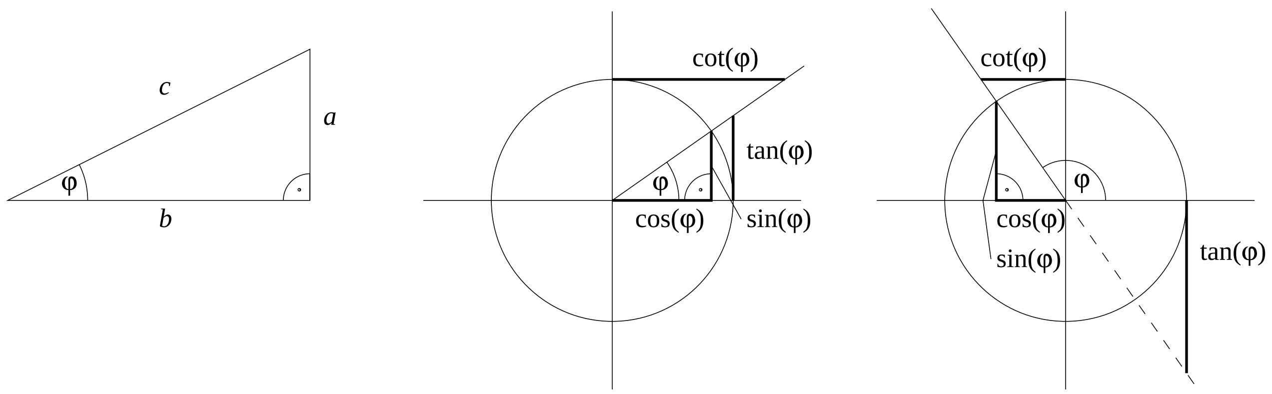
Das Bogenmaß misst den Winkel als Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis.

Bei der grafischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen liefert nur das Bogenmaß willkürfreie Kurvenformen.



5.2 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $\tan(\varphi)$ und $\cot(\varphi)$ werden entweder am rechtwinkligen Dreieck ($\varphi < 90°$) oder am Einheitskreis definiert:



$$\sin(\varphi) = \frac{a}{c}; \quad \cos(\varphi) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b}; \quad \cot(\varphi) = \frac{b}{a}$$

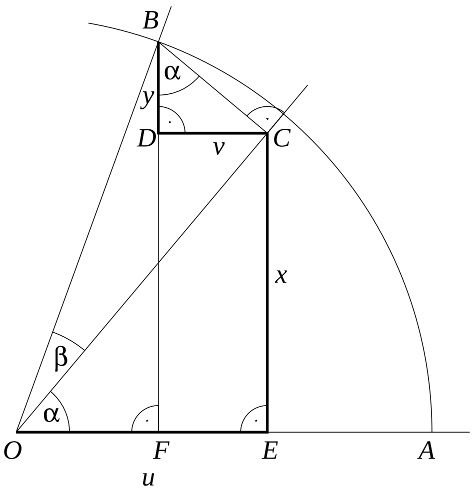
5.3 Zusammenhang zwischen den Funktionen

Pythagoras: $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(\varphi) =$	$\sin(\varphi)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$	$\dfrac{\tan(\varphi)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
$\cos(\varphi) =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$	$\cos(\varphi)$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\dfrac{\cot(\varphi)}{\pm\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
$\tan(\varphi) =$	$\dfrac{\sin(\varphi)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)}$	$\tan(\varphi)$	$\dfrac{1}{\cot(\varphi)}$
$\cot(\varphi) =$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)}$	$\dfrac{\cos(\varphi)}{\pm\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}$	$\dfrac{1}{\tan(\varphi)}$	$\cot(\varphi)$

5.4 Additionstheoreme

Sei $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = 1;\ \overline{\mathrm{OE}} = u;\ \overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{CD}} = v$
$\overline{\mathrm{CE}} = x;\ \overline{\mathrm{BD}} = y$



$\Rightarrow \sin(\beta) = \overline{\mathrm{BC}} \qquad \cos(\beta) = \overline{\mathrm{OC}}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{x}{\cos(\beta)} \quad\Rightarrow\quad x = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{v}{\sin(\beta)} \quad\Rightarrow\quad v = \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{u}{\cos(\beta)} \quad\Rightarrow\quad u = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{y}{\sin(\beta)} \quad\Rightarrow\quad y = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$\sin(\alpha+\beta) = \overline{\mathrm{BF}} = x + y = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \overline{\mathrm{OF}} = u - v = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

Entsprechend lassen sich Ausdrücke für $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, usw. ableiten.

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)} \tag{1}$$

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)} \tag{2}$$

$$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}} \tag{3}$$

$$\boxed{\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)\mp 1}{\cot(\alpha)\pm\cot(\beta)}} \tag{4}$$

Für $\alpha = \beta$ folgt daraus:

$$\boxed{\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)} \tag{5}$$

$$\boxed{\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \tag{6}$$

$$\cos(2\cdot\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2(\alpha) \tag{6'}$$

$$\boxed{\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}} \quad (7) \qquad \boxed{\cot(2 \cdot \alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2 \cdot \cot(\alpha)}} \quad (8)$$

5.5 Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot r \tag{9}$$

5.6 Kosinussatz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \end{aligned} \tag{10}$$

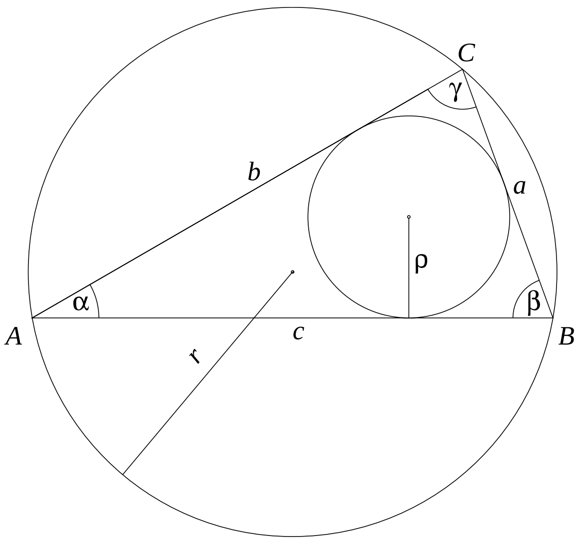
5.7 Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma) \quad &= \quad \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 2 \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ &= \quad \varrho \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \\ & \qquad \text{mit} \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

5.8 Radien

$$\text{Umkreisradius :} \quad r = \frac{a}{2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{b}{2 \cdot \sin(\beta)} = \frac{c}{2 \cdot \sin(\gamma)} \tag{12}$$

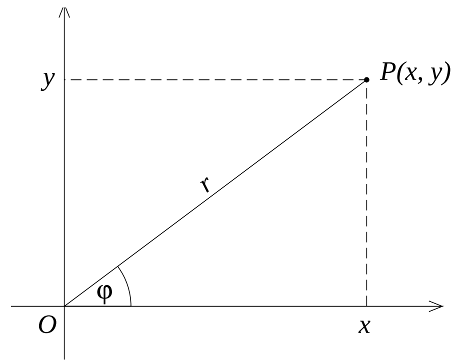
$$\text{Inkreisradius :} \quad \varrho = s \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{13}$$



6 Analytische Geometrie

In der analytischen Geometrie werden geometrische Probleme durch Zahlen beschrieben und rechnerisch gelöst. Dies gelingt durch Einführung eines **Koordinatensystems**.

6.1 Koordinatensysteme



Für die Ebene sind zwei Koordinatensysteme von besonderer Bedeutung:

6.1.1 Rechtwinklige Koordinaten (kartesisch)

Ein Punkt P der Ebene wird beschrieben durch Angabe seiner rechtwinkligen Koordinaten x und y.

6.1.2 Polarkoordinaten

Ein Punkt P der Ebene wird beschrieben durch Angabe seines Abstandes r vom Ursprung O und des Winkels φ, den die Gerade OP mit der x–Achse bildet.

6.2 Koordinatentransformationen

Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen wird Koordinatentransformation genannt.
Für die beiden aufgeführten Systeme gilt:

Rechtwinklige Koordinaten $\Longleftrightarrow$ **Polarkoordinaten**

$x = r \cdot \cos(\varphi)$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für I. und IV. Quadr.} \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{für II. Quadr.} \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{für III. Quadr.} \end{cases}$$

6.3 Kurven

Wird aus der Punktmenge der Ebene durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

eine Teilmenge ausgewählt, so nennt man diese Teilmenge eine **Kurve**.

Zur Kurve gehört also jeder Punkt der Ebene, dessen Koordinaten x und y die Kurvengleichung erfüllen:

$$k = \{P(x, y) | F(x, y) = 0\} \tag{2}$$

In vielen Fällen lässt sich diese **implizite** Darstellung $F(x, y) = 0$ für die Kurve überführen in die sogenannte **explizite** Darstellung:

$$y = f(x) \tag{3}$$

In diesen Fällen ist die Kurve der **Graph** einer Funktion.

6.4 Parameterdarstellung für Kurven

Die Beschreibung einer Kurve mit Hilfe der Gleichung $F(x, y) = 0$ kann sehr komplex und unübersichtlich werden. In vielen Fällen empfiehlt sich dann die sogenannte **Parameterdarstellung**:

Man wählt eine Hilfsgröße t, den Parameter, (Winkel, Zeit etc.) und stellt die Koordinaten x und y als Funktion des Parameters t dar (s. auch Kap. 15):

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad x(t) \text{ und } y(t) \text{ stetig} \tag{4}$$

6.5 Gerade

Eine Gerade lässt sich definieren als eine Kurve mit der Gleichung:

6.5.1 Allgemeine Form

$$\boxed{A \cdot x + B \cdot y + C = 0} \qquad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{5}$$

Ist $B \neq 0$, so kann nach y aufgelöst werden:

6.5.2 Normalform

$$\boxed{y = m \cdot x + b} \qquad (m = \text{Steigung};\ b = \text{Ordinatenabschnitt}) \tag{6}$$

Eine Gerade kann durch einen Punkt und ihre Steigung oder durch zwei Punkte festgelegt werden. Je nach Sachlage verwendet man weitere Formen der Geradengleichung:

6.5.3 Punkt–Richtungsform

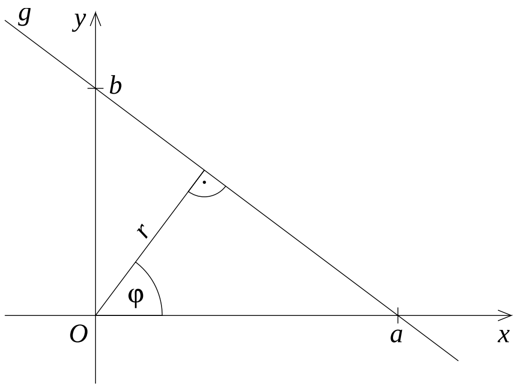
Gegeben: Punkt $P_1(x_1, y_1)$; Steigung m

$$\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)} \tag{7}$$

6.5.4 Zweipunkteform

Gegeben: Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$

$$\boxed{(y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y + x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 = 0} \tag{8}$$



6.5.5 Abschnittsform

Gegeben: Achsenabschnitte a und b

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (9)$$

6.5.6 Hessesche Normalform

Gegeben: Abstand r der Geraden vom Nullpunkt und Winkel φ des Lotes mit der x–Achse

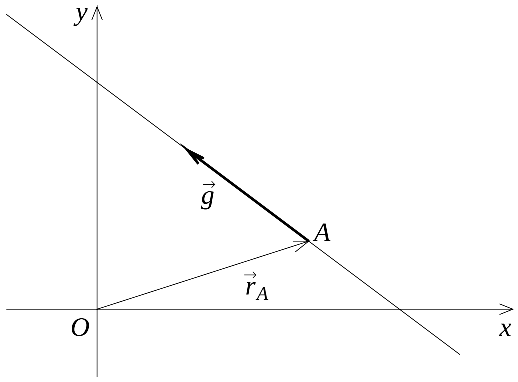
$$x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) - r = 0 \qquad (10)$$

Die Hessesche Normalform erhält man aus der allgemeinen Form

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \qquad (11)$$

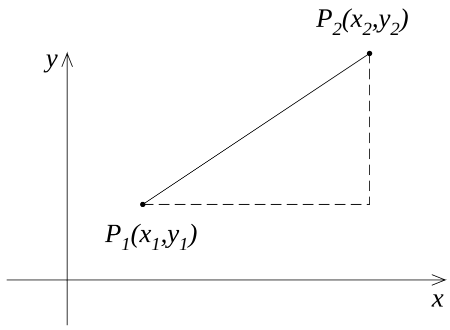
durch Division dieser Gleichung durch k mit

$$k^2 = A^2 + B^2 \text{ und } k \cdot C \leq 0 \qquad (12)$$



6.5.7 Parameterform

$$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{g}} \; (t \in \mathcal{R}) \qquad (13)$$



6.6 Strecken und Flächen

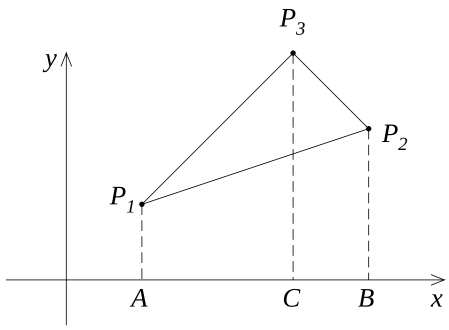
6.6.1 Strecke

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (14)$$

6.6.2 Fläche eines Dreiecks

Sind von einem Dreieck die Koordinaten der drei Eckpunkte gegeben, so ist eine Flächenberechnung über Grundfläche und Höhe ungünstig.
Die Fläche des Dreiecks lässt sich immer durch geeignete Addition bzw. Subtraktion von drei Trapezflächen berechnen. Im nebenstehenden Dreieck gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_\triangle &= \mathrm{A}_{ACP_3P_1} + \mathrm{A}_{CBP_2P_3} - \mathrm{A}_{ABP_2P_1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x_3 - x_1) \cdot (y_3 + y_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_3) \cdot (y_2 + y_3) \qquad (15) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (y_2 + y_1)
\end{aligned}
$$



Ausmultiplizieren und erneutes Zusammenfassen folgt:

$$\mathrm{A}_\triangle = 0.5 \cdot [x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)] \qquad \text{oder} \qquad (16)$$

$$\mathrm{A}_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

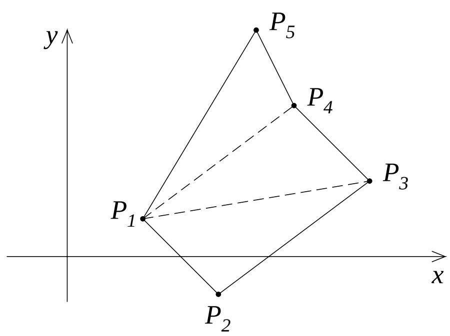
Diese Formel gilt auch für eine beliebige Anordnung der Punkte P_1, P_2 und P_3, wenn der Betrag der rechten Seite genommen wird.

6.6.3 Fläche eines n–Ecks

Jedes n–Eck lässt sich in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen. Durch Anwendung der obigen Flächenformel für das Dreieck erhält man folgende Formel für das n–Eck:

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) \right| \qquad (18)$$

wobei $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ zu setzen ist.



6.7 Schnittwinkel zweier Geraden

Gegeben: $g_1: \quad y = m_1 \cdot x + b_1 \quad (\tan(\alpha_1) = m_1)$
$g_2: \quad y = m_2 \cdot x + b_2 \quad (\tan(\alpha_2) = m_2)$

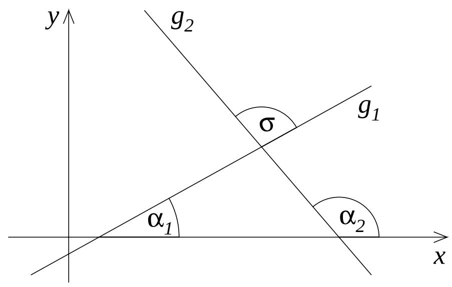
Für den Schnittwinkel σ folgt dann:

$$\tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad \text{falls } 1 + m_1 \cdot m_2 \neq 0 \quad (19)$$

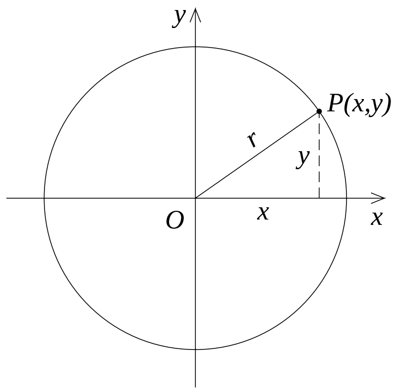
$$\sigma = \frac{\pi}{2} \quad \text{falls } 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow g_1 \perp g_2) \quad (20)$$

Mit Rechner besser:

$$\boxed{\sigma = \arctan(m_2) - \arctan(m_1)} \qquad (21)$$



6.8 Kreis

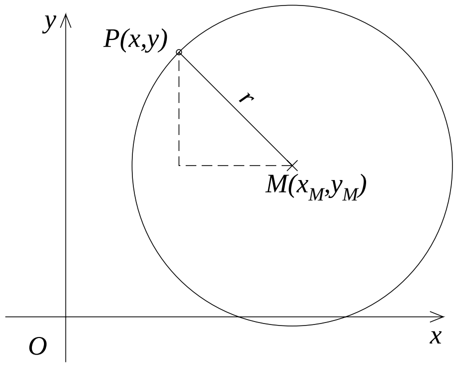


Definition: Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene einen konstanten Abstand haben. Der feste Punkt heißt **Mittelpunkt M**, der konstante Abstand heißt **Radius r**.

6.8.1 Mittelpunktsgleichung

Liegt der Mittelpunkt M im Ursprung des Koordinatensystems, folgt für die Punkte des Kreises (Pythagoras):

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{22}$$

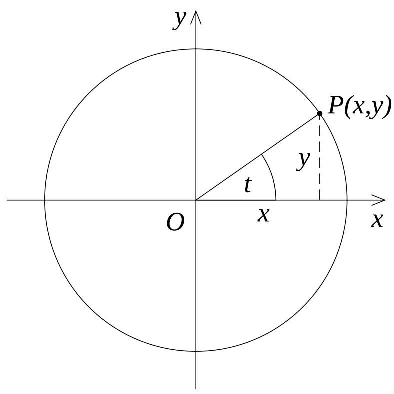


6.8.2 Allgemeine Kreisgleichung

Bei beliebiger Lage des Mittelpunktes M(x_M, y_M) gilt:

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2} \tag{23}$$

6.8.3 Parameterdarstellung

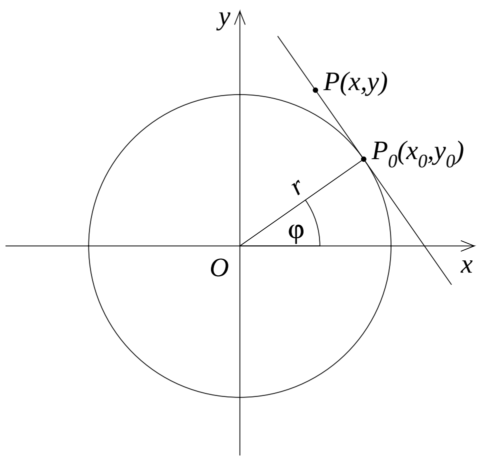


Eine einfache und viel gebrauchte Parameterdarstellung des Kreises in Mittelpunktslage erhält man, wenn als Parameter t der Winkel zwischen der x–Achse und dem Radius zum Punkt $P(x, y)$ gewählt wird.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(t) \\ y &= r \cdot \sin(t) \end{aligned}} \tag{24}$$

In allgemeiner Lage gilt entsprechend:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_M + r \cdot \cos(t) \\ y &= y_M + r \cdot \sin(t) \end{aligned}} \tag{25}$$



6.8.4 Tangente des Kreises

Die Hessesche Normalform der Tangente ist

$$x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) - r = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad x \cdot \frac{x_0}{r} + y \cdot \frac{y_0}{r} - r = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2} \qquad \textbf{(Tangentengleichung)} \tag{26}$$

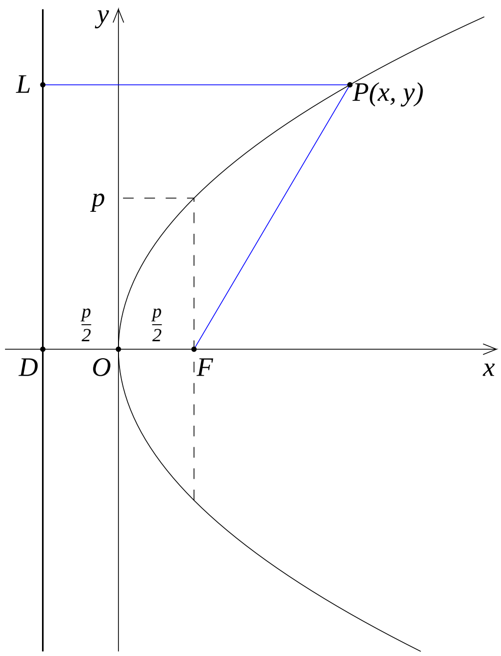
Allgemein:

$$\boxed{(x - x_M) \cdot (x_0 - x_M) + (y - y_M) \cdot (y_0 - y_M) = r^2} \tag{27}$$

Anmerkung: Liegt der Punkt P_0 außerhalb des Kreises, so beschreibt die letzte Gleichung die zu P_0 gehörige **Polare** (Verbindung der Berührungspunkte der beiden Tangenten von P_0 an den Kreis).

6.9 Parabel

Definition: Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (dem **Brennpunkt**) und einer festen Geraden (der **Leitlinie**) den gleichen Abstand haben.



Bezeichnungen:

F:	Brennpunkt
O:	Scheitel
DL:	Leitlinie
$p = \overline{DF}$:	Halbparameter
FP:	Brennstrahl
PL:	Leitstrahl

6.9.1 Scheitelgleichung

Aus der Definition folgt: $\overline{PF} = \overline{PL}$
Mit dem oben gewählten Koordinatensystem gilt:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \overline{PL} = x + \frac{p}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$\Longrightarrow \qquad x^2 - p \cdot x + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4}$$

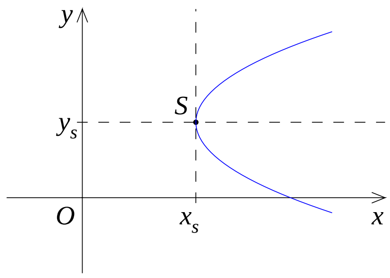
$$\Longrightarrow \qquad \boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x} \qquad (28) \qquad \begin{cases} p > 0: & \text{Parabel nach rechts geöffnet} \\ p < 0: & \text{Parabel nach links geöffnet} \end{cases}$$

Entsprechend folgt bei Öffnung der Parabel nach oben oder unten:

$$\boxed{x^2 = 2 \cdot p \cdot y} \qquad (29) \qquad \begin{cases} p > 0: & \text{Parabel nach oben geöffnet} \\ p < 0: & \text{Parabel nach unten geöffnet} \end{cases}$$

6.9.2 Allgemeine Gleichung bei achsenparalleler Lage

Scheitelpunkt: $S(x_S, y_S)$



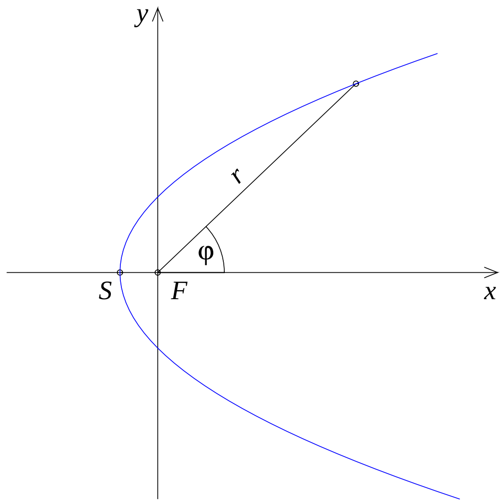
$$\boxed{(y - y_S)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_S)} \qquad (30)$$

6.9.3 Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = t^2 + x_S \\ y(t) = c \cdot t + y_S \end{array}} \quad (t \in \mathcal{R}) \qquad (31)$$

6.9.4 Polarkoordinaten

Nullpunkt im Brennpunkt, x–Achse durch den Scheitel, (s. Abb.)



$$y^2 = 2 \cdot p \cdot (x + \frac{p}{2})$$

$$\Longrightarrow \quad (r \cdot \sin(\varphi))^2 = 2 \cdot p \cdot (r \cdot \cos(\varphi) + \frac{p}{2})$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 - \frac{2 \cdot p \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} \cdot r - \frac{p^2}{\sin^2(\varphi)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad r_{1/2} = \frac{p \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} \pm \sqrt{\left(\frac{p \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}\right)^2 + \frac{p^2}{\sin^2(\varphi)}}$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{p \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} \pm p \cdot \frac{\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}}{\sin^2(\varphi)} = p \cdot \frac{\cos(\varphi) \pm 1}{\sin^2(\varphi)}$$

Wegen $r \geq 0$ und $\cos(\varphi) \leq 1$ ist nur $+$ möglich:

$$\Longrightarrow \quad r = p \cdot \frac{1 + \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = p \cdot \frac{1 + \cos(\varphi)}{1 - \cos^2(\varphi)} = p \cdot \frac{1 + \cos(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi))(1 - \cos(\varphi))}$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \cos(\varphi)}} \qquad (32)$$

6.9.5 Parabel und Gerade

Parabel: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, Gerade: $y = m \cdot x + b$

Schnittpunkte: $m^2 \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot b \cdot x + b^2 = 2 \cdot p \cdot x$

$$\Longrightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-m \cdot b + p}{m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{m \cdot b - p}{m^2}\right)^2 - \frac{b^2}{m^2}} = \frac{-m \cdot b + p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 2 \cdot m \cdot b \cdot p}}{m^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{x_{1;2} = \frac{-m \cdot b + p \pm \sqrt{p \cdot (p - 2 \cdot m \cdot b)}}{m^2}} \tag{33}$$

$$\boxed{y_{1;\ 2} = \frac{p \pm \sqrt{p \cdot (p - 2 \cdot m \cdot b)}}{m}} \tag{34}$$

6.9.6 Tangente

Es muss genau einen Schnittpunkt geben: $p - 2 \cdot m \cdot b = 0$

$$\Longrightarrow \qquad \text{Berührungspunkt:} \quad x_0 = \frac{-m \cdot b + p}{m^2} = \frac{p}{2 \cdot m^2} \quad \Longrightarrow \quad y_0 = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m = \dfrac{p}{y_0} \quad \Longrightarrow \quad (y - y_0) \cdot y_0 = p \cdot (x - x_0)$

$$\Longrightarrow \qquad y \cdot y_0 = p \cdot x - p \cdot x_0 + y_0^2$$

Wegen $y_0^2 = 2 \cdot p \cdot x_0$ folgt

$$\boxed{y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0)} \tag{35}$$

6.9.7 Weitere Eigenschaften

Aus $x_0 = \dfrac{p}{2 \cdot m^2}$ und $y_0 = \dfrac{p}{m}$

für den Berührungspunkt der Tangente folgt

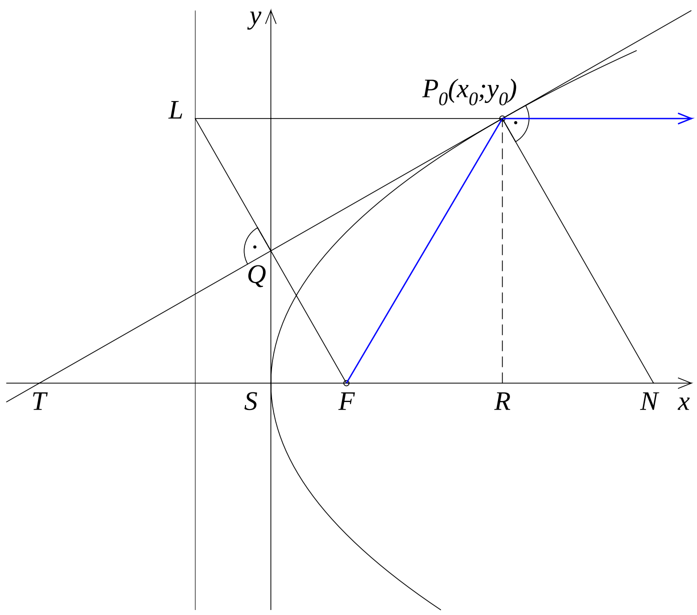
$$m = \frac{y_0}{2 \cdot x_0}$$

$$\overline{ST} = \overline{SR} = x_0$$

$$\overline{SQ} = \frac{y_0}{2} \;\Rightarrow\; \overline{LF} \perp \overline{TP_0}$$

$$\overline{RN} = 2 \cdot \overline{SF} = p$$

Die Tangente halbiert den Winkel zwischen Brennstrahl und Leitstrahl.



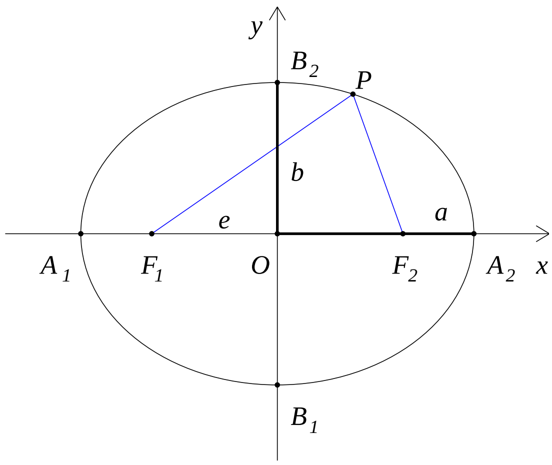
Technische Anwendung: Parabolspiegel (Parabolantenne): Alle vom Brennpunkt ausgehenden Strahlen laufen nach der Spiegelung parallel.

6.10 Ellipse

Definition: Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Bezeichnungen:

$F_1,\ F_2:$	Brennpunkte
$A_1,\ A_2:$	Hauptscheitel
$B_1,\ B_2:$	Nebenscheitel
$\overline{A_1A_2} = 2\cdot a:$	große Achse (a: große Halbachse)
$\overline{B_1B_2} = 2\cdot b:$	kleine Achse (b: kleine Halbachse)
$\overline{F_1O} = e:$	(lineare) Exzentrizität
$e/a = \varepsilon:$	numerische Exzentrizität ($\varepsilon < 1$)
$M = O:$	Mittelpunkt
$b^2/a = p:$	Halbparameter



6.10.1 Mittelpunktsgleichung

Aus der Definition folgt: $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2\cdot a$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{(e+x)^2+y^2} + \sqrt{(e-x)^2+y^2} = 2\cdot a \qquad \text{(quadrieren)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^2 + 2\cdot e\cdot x + x^2 + y^2 = 4\cdot a^2 - 4\cdot a\cdot\sqrt{(e-x)^2+y^2} + e^2 - 2\cdot e\cdot x + x^2 + y^2$$

$$\Longrightarrow \quad e\cdot x - a^2 = -a\cdot\sqrt{(e-x)^2+y^2} \qquad \text{(quadrieren und zusammenfassen)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a^2-e^2)\cdot x^2 + a\cdot y^2 = a^2\cdot(a^2-e^2)$$

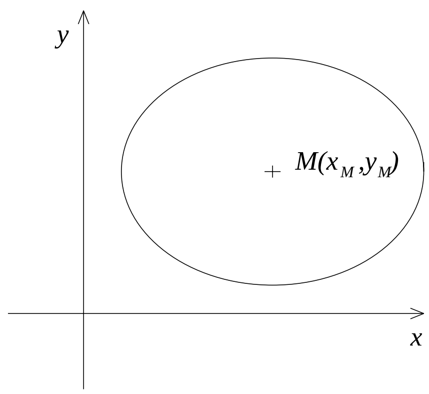
mit $a^2 - e^2 = b^2$ (b – kleine Halbachse) folgt: $\quad b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2 \quad \Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{36}$$

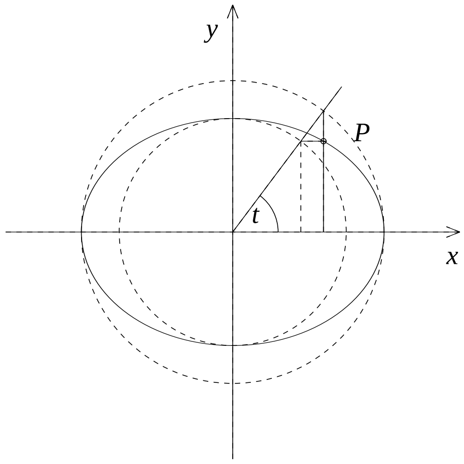
6.10.2 Allgemeine Lage (achsenparallel)

Mittelpunkt: $M(x_M,\ y_M)$

$$\boxed{\frac{(x-x_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1} \tag{37}$$



6.10.3 Parameterdarstellung



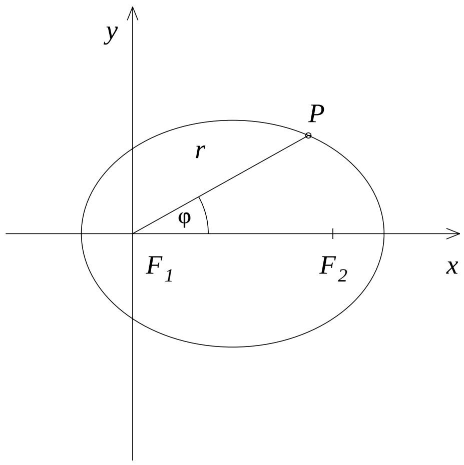
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos(t) \\ y(t) &= b \cdot \sin(t) \end{aligned}} \tag{38}$$

Der Winkel t (s. Abb.) heißt exzentrische Anomalie.

6.10.4 Polarkoordinaten

Wie bei der Parabel wird der Koordinatenursprung in einen Brennpunkt gelegt.

Als Polargleichung der Ellipse ergibt sich dann:



$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}} \quad (\varepsilon = e/a) \tag{39}$$

6.10.5 Ellipse und Gerade

Ellipse: $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$;
Gerade: $y = m \cdot x + n$

Für die **Schnittpunkte** ergibt sich:

$$x_{1;\,2} = \frac{-a^2 \cdot m \cdot n \pm a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2}}{a^2 \cdot m^2 + b^2} \tag{40}$$

$$y_{1;\,2} = \frac{b^2 \cdot n \pm a \cdot b \cdot m \cdot \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2}}{a^2 \cdot m^2 + b^2} \tag{41}$$

6.10.6 Tangente

Tangentenbedingung: $a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2 = 0$
Für den Berührungspunkt gilt dann:

$$x_0 = \frac{-a^2 \cdot m \cdot n}{a^2 \cdot m^2 + b^2} = \frac{-a^2 \cdot m}{n} \qquad y_0 = \frac{b^2 \cdot n}{a^2 \cdot m^2 + b^2} = \frac{b^2}{n} \tag{42}$$

Daraus folgt für die Steigung der Tangente im Punkt $P_0(x_0, y_0)$:

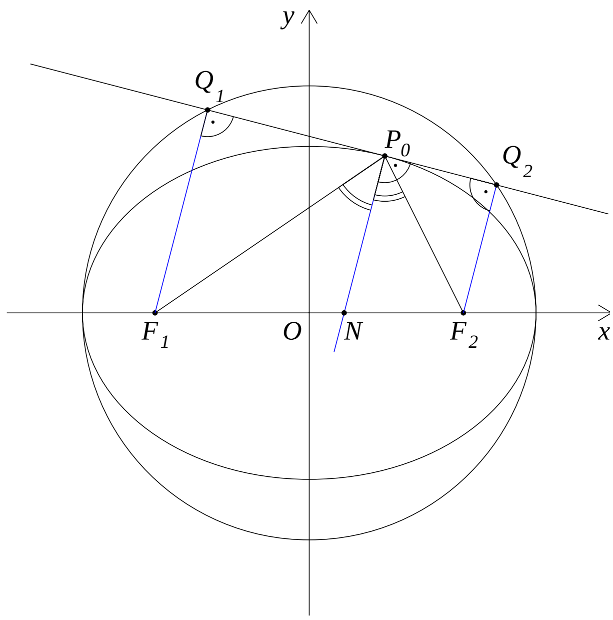
$$m = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \tag{43}$$

Mit der Punktrichtungsform für die Tangente folgt:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \quad \Longrightarrow \quad a^2 \cdot y \cdot y_0 + b^2 \cdot x \cdot x_0 = b^2 \cdot x_0^2 + a^2 \cdot y_0^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\boxed{\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1} \quad \text{Tangentengleichung im Punkt } P_0 \text{ (bei Mittelpunktslage)} \tag{44}$$

6.10.7 Weitere Eigenschaften



Der Fußpunkt des Lotes, das von einem Brennpunkt der Ellipse auf eine Ellipsentangente gefällt ist, liegt auf dem Hauptscheitelkreis (s. Abb., Punkte Q_1 und Q_2).

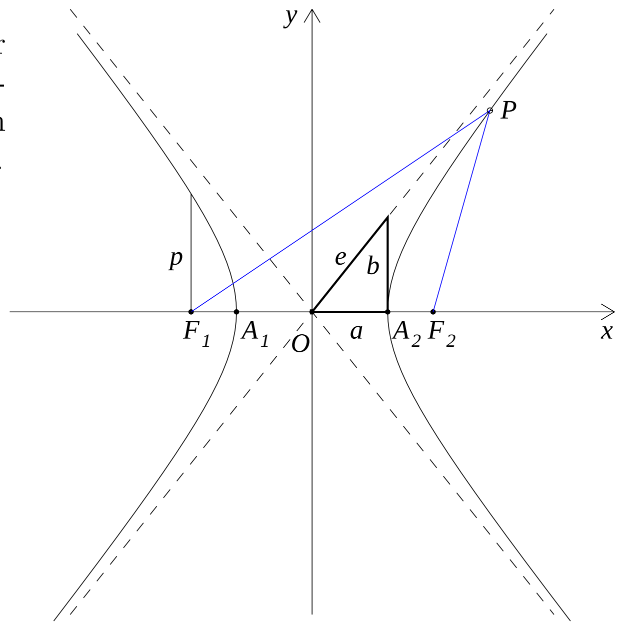
Daraus ergibt sich eine Hüllenkonstruktion für die Ellipse.

Die Normale in einem Ellipsenpunkt halbiert den Winkel zwischen den beiden zugehörigen Brennstrahlen:

$$\angle F_1 P_0 N = \angle F_2 P_0 N$$

Technische Anwendung: Alle von F_1 ausgehenden Strahlen werden nach F_2 reflektiert. (Flüstergalerie)

6.11 Hyperbel



Definiton: Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Differenz ergeben.

Bezeichnungen:

$F_1 F_2$:	Brennpunkte
$A_1 A_2$:	Scheitelpunkte
$M = O$:	Mittelpunkt
$\overline{F_1 O} = e$:	(lineare) Exzentrizität
$\overline{A_1 O} = a$:	reelle Halbachse
$b = \sqrt{e^2 - a^2}$:	imaginäre Halbachse
$\varepsilon = e/a$:	numerische Exzentrizität ($\varepsilon > 1$)
$p = b^2/a$:	Halbparameter

6.11.1 Mittelpunktsgleichung

Aus der Definition folgt: $\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P} = 2 \cdot a$. Einsetzen und Umformen wie bei der Ellipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{45}$$

6.11.2 Allgemeine achsenparallele Lage

Mittelpunkt: $M(x_M,\ y_M)$

$$\boxed{\frac{(x-x_M)^2}{a^2} - \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1} \tag{46}$$

6.11.3 Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \pm a \cdot \cosh(t) \\ y(t) &= b \cdot \sinh(t) \end{aligned}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= a/\cos(t) \\ y(t) &= \pm b \cdot \tan(t) \end{aligned}} \tag{47}$$

6.11.4 Polarkoordinaten

Pol im Brennpunkt:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}} \tag{48}$$

6.11.5 Hyperbel und Gerade

Hyperbel: $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$
Gerade: $y = m \cdot x + n$

Schittpunkte:

$$\begin{aligned} x_{1,\ 2} &= \frac{a^2 \cdot m \cdot n}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \pm \frac{a \cdot b}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \cdot \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2} \\ y_{1,\ 2} &= \frac{b^2 \cdot n}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \pm \frac{a \cdot b \cdot m}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \cdot \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2} \end{aligned} \qquad \text{für } b^2 \neq a^2 \cdot m^2 \tag{49}$$

Sonderfälle: a) $b^2 = a^2 \cdot m^2$ und $m \cdot n \neq 0$

Es gibt nur einen Schnittpunkt. Die Gerade ist parallel zu einer Asymptoten.

Schnittpunkt: $x_S = -(b^2 + n^2)/(2 \cdot m \cdot n)$

$y_S = (n^2 - b^2)/(2 \cdot n)$

b) $b^2 = a^2 \cdot m^2,\ m \neq 0,\ n = 0$: Die Gerade ist eine Asymptote.

6.11.6 Tangente

Tangentenbedingung: $b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2 = 0$

Steigung der Tangente im Berührungspunkt $P_0(x_0,\ y_0)$: $\quad m = \dfrac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0}$

$$\boxed{\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1} \quad \text{Tangentengleichung im Punkt } P_0 \text{ (bei Mittelpunktslage)} \tag{50}$$

6.12 Übersicht über die Kegelschnitte

6.12.1 Gemeinsame Gleichungen

Scheitelgleichung: $\boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x + (\varepsilon^2 - 1) \cdot x^2}$ (Ursprung im Scheitel) (51)

Polargleichung: $\boxed{r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}}$ (Ursprung im Brennpunkt) (52)

Darin ist zu setzen:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0&: \text{ Kreis} \\ 0 < \varepsilon < 1&: \text{ Ellipse} \\ \varepsilon = 1&: \text{ Parabel} \\ \varepsilon > 1&: \text{ Hyperbel} \end{aligned}$$

6.12.2 Allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$\boxed{F(x,y) = a_{00} + 2a_{01} \cdot x + 2a_{02} \cdot y + a_{11} \cdot x^2 + 2a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 = 0} \tag{53}$$

Bei Koordinatentransformationen ändern sich folgende Größen nicht:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad S = a_{11} + a_{22}$$

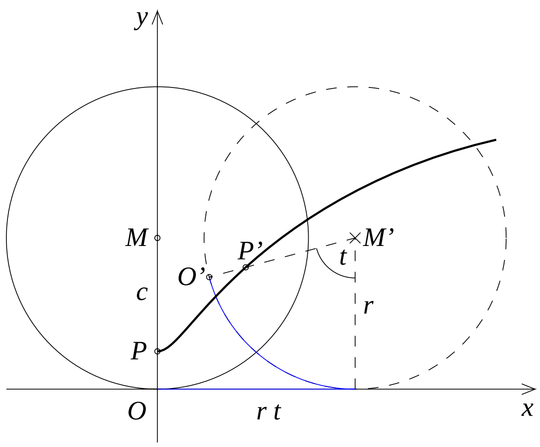
$(a_{ik} = a_{ki})$

Die Art des Kegelschnittes lässt sich aus folgender Tabelle ermitteln.

<table>
<tr><td>δ \ Δ</td><td>< 0</td><td>> 0</td><td colspan="3">$= 0 \quad (a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{22} \neq 0)$</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td><td>Hyperbel</td><td>Ellipse,
falls $\Delta \cdot S < 0$
Keine reelle Kurve,
falls $\Delta \cdot S > 0$</td><td colspan="3">Parabel</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">$a_{01}^2 - a_{00} \cdot a_{11}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>> 0</td><td>$= 0$</td><td>< 0</td></tr>
<tr><td>$= 0$</td><td>sich schneidende Geraden</td><td>Punkt</td><td>parallele Geraden</td><td>eine Gerade</td><td>Keine reelle Kurve</td></tr>
</table>

6.13 Rollkurven

6.13.1 Zykloide

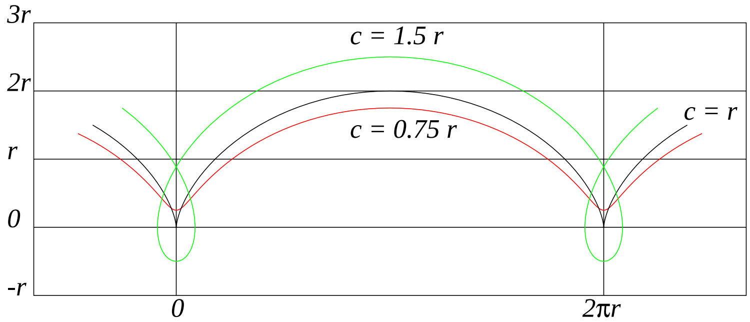


Rollt ein Kreis auf einer Geraden ohne zu gleiten, so beschreibt ein Punkt P, der fest mit dem Kreis verbunden ist, eine Zykloide.

Parameterdarstellung:

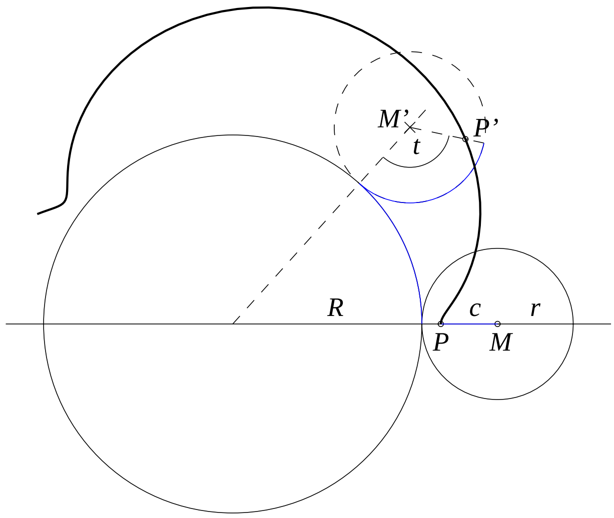
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r\cdot t - c\cdot\sin(t) \\ y(t) &= r \quad - c\cdot\cos(t) \end{aligned}} \tag{54}$$

$r =$ Radius des Kreises; $c = \overline{PM}$
$t =$ Winkel im Bogenmaß



Je nach Größe von c gilt:
$c = 0$: Gerade
$c < r$: gestreckte Zykloide
$c = r$: gewöhnliche Zykloide
$c > r$: verschlungene Zykloide

6.13.2 Epizykloide

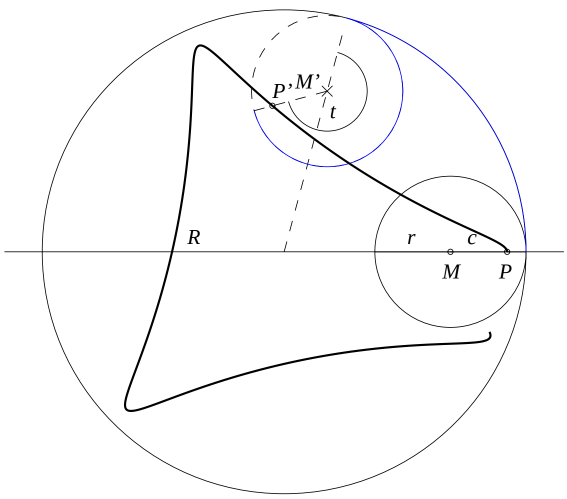


Ein Kreis rollt **außen** auf einem festen Kreis ohne zu gleiten.

Parameterdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\cdot\cos\left(\frac{r\cdot t}{R}\right) - c\cdot\cos\left(\frac{R+r}{R}\cdot t\right) \\ y(t) &= (R+r)\cdot\sin\left(\frac{r\cdot t}{R}\right) - c\cdot\sin\left(\frac{R+r}{R}\cdot t\right) \end{aligned}} \tag{55}$$

6.13.3 Hypozykloide



Ein Kreis rollt **innen** auf einem festen Kreis ohne zu gleiten.

Parameterdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= (R-r)\cdot\cos\left(\frac{r\cdot t}{R}\right) + c\cdot\cos\left(\frac{R-r}{R}\cdot t\right) \\ y(t) &= (R-r)\cdot\sin\left(\frac{r\cdot t}{R}\right) - c\cdot\sin\left(\frac{R-r}{R}\cdot t\right) \end{aligned}} \tag{56}$$

7 Differentialrechnung

7.1 Reelle Funktionen

7.1.1 Definitionen

Eine **Funktion** (oder Abbildung) von zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Vorschrift, die jedem Element aus $\mathcal{A}$ genau ein Element aus $\mathcal{B}$ zuordnet. Die Zuordnungsvorschrift ist meistens eine Gleichung.

Die Menge $\mathcal{A}$ heißt **Definitionsbereich** oder **Argumentmenge**, die Menge $\mathcal{B}$ Wertebereich oder **Zielmenge**.

Die Menge der Paare (a, b) mit $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$ (Punktmenge in der Ebene) heißt **Graph** der Funktion.

Ist auch jedem Element aus $\mathcal{B}$ nur ein Element aus $\mathcal{A}$ zugeordnet, so heißt die Funktion **umkehrbar**.

Sind einem Element aus $\mathcal{A}$ mehrere Elemente aus $\mathcal{B}$ zugeordnet, so heißt die Zuordnung **Relation**.

7.1.2 Einteilung der reellen Funktionen

Rational			Nichtrational		
Name	Allgemein	Beispiel	Name	Allgemein	Beispiel
Ganz–rational	$y = \sum_0^n a_i \cdot x^i$	$y = 2 \cdot x^3$	Potenz–funktion	$y = x^a$ $a \in \mathcal{R}$ $x \in \mathcal{R}^+$	$y = \sqrt{x}$
Gebrochen rational	$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P und Q ganzrational	$y = \frac{x^2+1}{x+1}$			
			Exponential–funktion	$y = x^a$ $x \in \mathcal{R}$ $a \in \mathcal{R}^+$	$y = e^x$
			Logarithmus–funktion	$y = \log_a(x)$ $a, x \in \mathcal{R}^+$ $a \neq 1$	$y = \ln(x)$
			Trigonometr. Funktion	$x \in \mathcal{R}$	$y = \sin(x)$
			Arcusfunktion	$x \in [-1, 1]$	$y = \arcsin(x)$

Anmerkung: Eine reelle Funktion $y = f(x)$ heißt **algebraisch**, wenn ihre Funktionsgleichung einer Gleichung der Form

$$0 = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j \tag{1}$$

äquivalent ist. Sonst heißt sie **transzendent**.

7.1.3 Eigenschaften von reellen Funktionen

Bezeichnung	Eigenschaft	Beispiel
symmetrisch	gerade: $f(-x) = f(x)$ ungerade: $f(-x) = -f(x)$	$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$
monoton	steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$f(x) = 1$
streng monoton	steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$f(x) = x^3$ $f(x) = -x$
periodisch	$f(x + a) = f(x)$; $a =$ Periode	$f(x) = \sin(x)$ $a = 2 \cdot \pi$
beschränkt	$\|f(x)\| \leq K;\ K \in \mathcal{R}^+$	$f(x) = \sin(x)$ $K = 1$
stetig	Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ Anschaulich: Der Graph ist ein ununterbrochener Linienzug	Alle in 7.1.2 genannten Funktionen (fast überall)

7.1.4 Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion ist folgendes zu untersuchen:

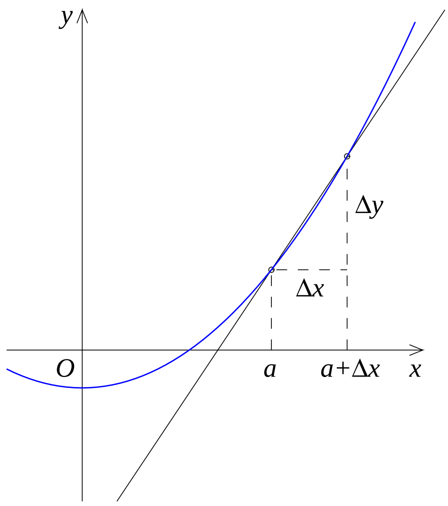
1. Definitionsbereich und Wertebereich
2. Symmetrien
3. Verhalten im Unendlichen und Pole
4. Unstetigkeitsstellen und Achsenschnittpunkte
5. Extrempunkte und Art der Extrempunkte
6. Wendepunkte und Steigung der Wendetangente
7. Wertetabelle und Skizze

Für die Punkte 5 und 6 sowie für das Verständnis der folgenden Tabelle wird die Differentialrechnung benötigt.

$f'(x)$	>0	>0	<0	<0	$=0$	$=0$	$=0$	
$f''(x)$	>0	<0	>0	<0		>0	<0	$=0$
Bogen bzw. Punkt					Extrem–wert	Tief–punkt	Hoch–punkt	Wende–punkt
Art der Bedingung					notw.	hinr.	hinr.	notw.

7.2 Differentiation

7.2.1 Definitionen



Unter der **Ableitung** einer Funktion

$$y = f(x) \tag{2}$$

an der Stelle $x = a$ versteht man den Grenzwert des **Differenzenquotienten**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{3}$$

für $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{4}$$

Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle $x = a$ an, der Differenzenquotient die Steigung der Sekante.
Die Berechnung des Grenzwertes erfolgt durch geeignete Umformung, so dass die Division durch Null vermieden wird.

Beispiel: $y = x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = 2 \cdot a + \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2 \cdot a$$

Bei der Angabe der Ableitung ersetzt man a durch x:

$$y = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y' = 2 \cdot x$$

7.2.2 Differentiationsregeln

Um den im Beispiel durchgeführten Rechengang nicht bei jeder Funktion wiederholen zu müssen, bedient man sich der folgenden Differentiationsregeln. Es genügt dann, die Ableitungen von wenigen Grundfunktionen zu kennen.

Anmerkung: Im Gegensatz zur Integration (s. Kap. 10) sind die Ableitungen von „elementaren“ Funktionen wieder elementare Funktionen, d. h. die Ableitung von Termen aus elementaren Funktionen mag komplex sein, sie ist aber mit wenigen (einfachen) Regeln zu ermitteln.

7.2.2.1 Konstante Funktion

$$y = f(x) = c \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \qquad \boxed{y' = 0} \tag{5}$$

7.2.2.2 Funktion mit konstantem Faktor

$$\begin{aligned} y = c \cdot f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{c \cdot f(x+\Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\ &= c \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\boxed{(c \cdot y)' = c \cdot y'} \tag{6}$$

7.2.2.3 Summe oder Differenz

$$\begin{aligned} y &= u(x) \pm v(x) \qquad \Longrightarrow \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x))}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \qquad \boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'} \end{aligned} \tag{7}$$

7.2.2.4 Produktregel

$$\begin{aligned} y &= u(x) \cdot v(x) \\ \Delta y &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\ &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + \\ &\quad + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\ &= v(x+\Delta x) \cdot (u(x+\Delta x) - u(x)) + \\ &\quad + u(x) \cdot (v(x+\Delta x) - v(x)) \qquad \boxed{(u \cdot v)' = v \cdot u' + u \cdot v'} \end{aligned} \tag{8}$$

7.2.2.5 Quotientenregel

$$\begin{aligned} y &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ \Delta y &= \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}} \end{aligned} \tag{9}$$

Zähler: $v(x) \cdot \Big(u(x+\Delta x) - u(x)\Big) - u(x) \cdot \Big(v(x+\Delta x) - v(x)\Big)$

7.2.2.6 Kettenregel

Heuristische Ableitung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}} \tag{10}$$

7.2.2.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $x = g(y)$ die Umkehrfunktion zu $y = f(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{1}{g'(y)}} \tag{11}$$

Beispiel: $y = f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad x = g(y) = \sin(y)$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7.2.2.8 Logarithmische Differentiation

Beispiel: Die Funktion $y = f(x) = (2 \cdot x^2 + 1)^{3x+5}$ lässt sich mit den vorstehenden Regeln folgendermaßen differenzieren:

Da für alle Zahlen $a > 0$ gilt: $a = e^{\ln(a)}$ kann man für y schreiben

$$y = e^{\ln(2x^2+1)\cdot(3x+5)} = e^z$$

$$y' = e^z \cdot z'; \quad z' = (3x+5) \cdot \frac{4 \cdot x}{2x^2+1} + \ln(2x^2+1) \cdot 3$$

s. folgende Tabelle

$$y' = (2x^2+1)^{(3x+5)} \cdot \Big((3x+5) \cdot \frac{4 \cdot x}{2x^2+1} + \ln(2x^2+1) \cdot 3\Big)$$

Dieses Verfahren lässt sich allgemein anwenden auf Funktionen der Form:

$$y = u(x)^{v(x)} \qquad \text{mit} \quad u(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{D}$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\Big(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot u'(x)/u(x)\Big)$$

Eine andere Methode ist, zunächst beide Seiten zu logarithmieren und dann zu differenzieren:

$$y = u(x)^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = v(x) \cdot \ln(u(x))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u}$$

Dieses Verfahren heißt **logarithmische Differentiation.**

7.2.2.9 Implizite Differentiation

Eine allgemeine Gleichung in x und y

$$F(x,y)=0$$

kann Probleme bei der Auflösung nach y bereiten, so dass die Ableitung y' nicht nach der bisherigen Methode berechnet werden kann. Durch Anwendung der Kettenregel ($z=y$) kann die Ableitung y' ohne Auflösung nach y berechnet werden.

Beispiel: $x\cdot y^2+y^3-5\cdot x=0 \quad\Rightarrow\quad y^2+x\cdot 2\cdot y\cdot y'+3\cdot y^2\cdot y'-5=0$

$$\Rightarrow\qquad y'=\frac{5-y^2}{3\cdot y^2+2\cdot x\cdot y}$$

y muss gegebenenfalls numerisch ermittelt werden (s. 4.4.3).

7.2.3 Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen

Funktion	Ableitung	Bemerkung	Funktion	Ableitung	Bemerkung
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$n\in\mathcal{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	x in rad
e^x	e^x	-	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	"
a^x	$a^x\cdot\ln(a)$	$a>0$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	"
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x>0$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$	$a>0;\ a\neq 1$ $x>0$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	"
			$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

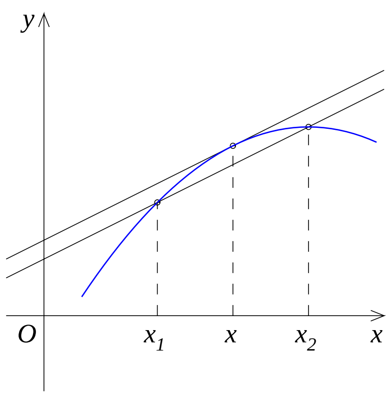
Tabelle 7.2.3: Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen

7.2.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Zwischenwertsatz)

Für jede differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt (s. Abb.)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x)\quad\text{mit}\quad x\in\ ]\,x_1,x_2[\qquad (12)$$

Zwischen den beiden Werten x_1 und x_2, die die Sekante festlegen, gibt es (mindestens) einen Zwischenwert x, für den die Steigung der Tangente mit der Steigung der Sekante übereinstimmt. Der Wert x liegt im allgemeinen nicht in der Mitte des Intervalls.



7.3 Anwendungen

7.3.1 Extremwerte und Wendepunkte

Lokale Extremwerte können nur dort auftreten, wo die Funktion waagerechte Tangenten hat, d. h. an Stellen mit $y' = 0$. Dies ist jedoch nur eine notwendige Bedingung, es könnte an der Stelle auch ein Sattelpunkt liegen. Weitere Auskunft kann die zweite Ableitung geben:

$$\begin{array}{l}\text{Maximum: } f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) < 0 \\ \text{Minimum: } f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) > 0\end{array} \tag{13}$$

Zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion muss immer (mindestens) ein lokaler Extremwert liegen. Daher ist zur Bestimmung von Extremwerten nicht immer die zweite Ableitung erforderlich.

Wendepunkte können nur dort liegen, wo die erste Ableitung einer Funktion lokale Extremwerte hat.

$$\text{Wendepunkt: } f''(x_W) = 0 \text{ und } f'''(x_W) \neq 0 \tag{14}$$

Bei einer differenzierbaren Funktion muss zwischen zwei Extremwerten immer (mindestens) ein Wendepunkt liegen. Daher ist die dritte Ableitung zur Bestimmung von Wendepunkten nicht immer erforderlich.

7.3.2 Regel von de l'Hospital

Ein Quotient aus zwei Funktionen

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

lässt sich an der Stelle $x = a$ nicht ohne weiteres berechnen, wenn entweder

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

gilt.

Die Regel von de l'Hospital ermöglicht die Berechnung derartig unbestimmter Ausdrücke.

Sei $f(a) = g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \quad \text{mit} \quad x_1 \in \;]\,a, x\,[\quad \text{(Mittelwertsatz 7.2.4)} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{16}$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Fall, dass $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ gilt.

Mit Hilfe dieser Regel lassen sich weitere „unbestimmte“ Ausdrücke berechnen, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Nr. $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7
Beispiel ($x \rightarrow 0$)	$\frac{\sin(x)}{x}$	$\frac{e^{1/x}}{1/x}$	$x \cdot (-\ln(x))$	$(1+\frac{1}{x})^x$	x^x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$
Form	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	∞^0	0^0	1^∞	$\infty - \infty$
Unformung auf			$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Grenzwert	1	∞	0	1	1	e	0

Tabelle 7.3.2: Beispiele zur Regel von de l'Hospital

Erläuterungen zu den Beispielen in Tabelle 7.3.2:

Nr. 1: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

Nr. 2: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} e^{1/x} = \infty$

Nr. 3: $\lim\limits_{x\to 0} x(-\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\ln(x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Nr. 4: Sei $a = (1+\frac{1}{x})^x \quad \Rightarrow \quad \ln(a) = x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0} a = e^0 = 1$

Nr. 5: Sei $a = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln(a) = x \cdot \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0} a = e^0 = 1$

Nr. 6: Sei $a = (1+x)^{1/x} \quad \Rightarrow \quad \ln(a) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} a = e^1 = e$$

Nr. 7: $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x)} = 0$$

8 Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

8.1 Definition und geometrische Deutung

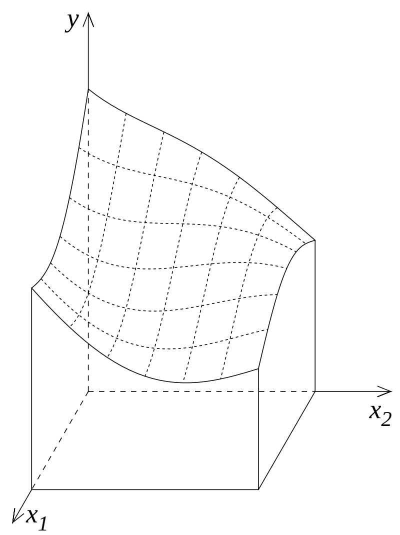
Der bisher verwandte Funktionsbegriff, bei dem **einer unabhängigen Variablen** x **eine abhängige Variable** y zugeordnet wurde, ist für viele Probleme der Technik nicht ausreichend. Wir werden daher den Funktionsbegriff erweitern und mehrere unabhängige Variable zulassen.
Jeder Kombination von unabhängigen Variablen x_1, x_2, …, x_n ist weiterhin eindeutig eine abhängige Variable y zugeordnet.

Beispiele: Ohmsches Gesetz: $R = \dfrac{U}{I}$; $\quad y = R,\ x_1 = U,\ x_2 = I$

Zustandsgleichung: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$; $\quad p = \dfrac{n \cdot R \cdot T}{V}$

Quadervolumen: $V = a \cdot b \cdot c$

Bei nur zwei unabhängigen Variablen kann die Funktion noch veranschaulicht werden: Jedem Punkt der (x_1, x_2)–Ebene wird ein Wert y zugeordnet, der senkrecht zur Ebene abgetragen wird. Die Menge der Punkte (x_1, x_2, y) ist dann eine Fläche im dreidimensionalen Raum.



Man kann hierbei zwei Aufgabentypen unterscheiden:

(a) Darstellung einer gegebenen Funktion als Fläche im Raum

(b) Bestimmung der Gleichung einer gegebenen Fläche im Raum

Die nebenstehende Abbildung ist eine Darstellung der Funktion

$$y = f(x_1,\ x_2) = \frac{a}{1 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2} + d \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(\frac{x_2}{x_{2e}} - \frac{x_1}{x_{1e}}\right)\right)$$

mit

$$\begin{array}{lll} a = 4 \text{ cm} & b = 0.5/x_{1e} & 0 \le x_1 \le x_{1e} \\ x_{1e} = 3 \text{ cm} & c = 1/x_{2e} & 0 \le x_2 \le x_{2e} \\ x_{2e} = 3 \text{ cm} & d = 0.5 \text{ cm} & \end{array}$$

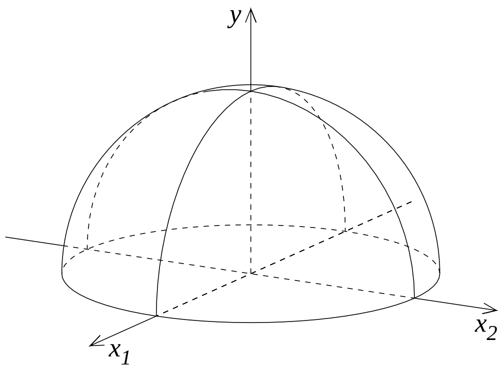
Projektion: $\quad (x_1, x_2, y) \quad \rightarrow \quad (u, v)$

mit

$$u = f_1 \cdot x_1 + x_2, \quad v = f_2 \cdot x_1 + y$$
$$f_1 = -\tfrac{1}{2}\sin(\varphi), \quad f_2 = -\tfrac{1}{2}\cos(\varphi), \quad \varphi = 30^\circ$$

Dazu je ein Beispiel:

Beispiel 1: $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

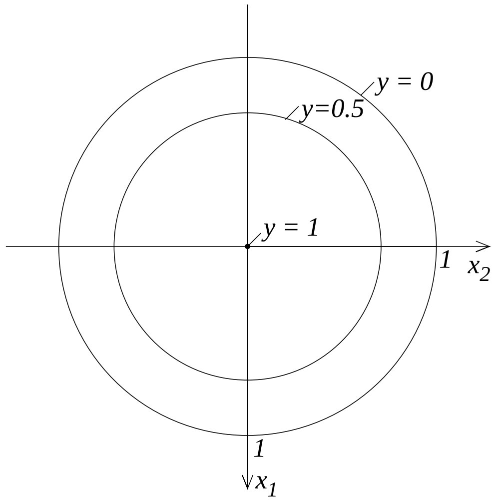


Für die Darstellung sind zwei Verfahren üblich:

(a) perspektivisch (oben)

(b) durch Höhenlinien (unten)

Setzt man z. B. $y = 0$, so erhält man die Gleichung einer Kurve in der (x_1, x_2)–Ebene. Dies ist die Schnittfläche der (x_1, x_2)–Ebene mit der gesuchten Fläche. Setzt man $y = a =$ const., so erhält man ebenfalls die Gleichung einer Kurve in der (x_1, x_2)–Ebene, die Schnittkurve mit der um a parallel verschobenen (x_1, x_2)–Ebene. Ebenso kann $x_1 = a$ oder $x_2 = a$ gesetzt werden, was Schnittkurven zu Parallelen der anderen Koordinatenebenen ergibt.



Bei dem obigen Beispiel erhält man als Schnittkurven Kreise, sofern $0 \leq a \leq 1$ ist. Die gesuchte Fläche ist eine Halbkugel.

Beispiel 2: Gesucht ist die Gleichung eines Kegels mit dem Radius R und der Höhe H, dessen Achse mit der y–Achse zusammenfällt. Grundfläche sei die (x_1, x_2)–Ebene.

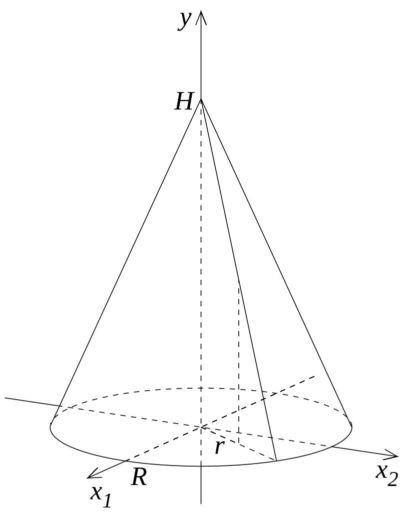
$$x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = H \cdot \left(1 - \frac{|\, x_1 \,|}{R}\right)$$

$$x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = H \cdot \left(1 - \frac{|\, x_2 \,|}{R}\right)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad y = H \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$y = \frac{H}{R} \cdot \left(R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \qquad 0 \leq x_1, x_2 \leq R$$

$$\Rightarrow \qquad x_1^2 + x_2^2 - R^2 \cdot (1 - y/H)^2 = 0$$



Bei Verschiebung des Koordinatenursprungs in die Kegelspitze, d. h. $(y - H) \rightarrow y$, folgt:

$$\boxed{\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{R^2} - \frac{y^2}{H^2} = 0} \text{ (Kreiskegel)}$$

8.2 Ableitungen

Bei Funktionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen $y = f(x_1, x_2)$, die als Flächen im Raum dargestellt werden können, kann nach der Neigung von Tangentialflächen bzw. der Lage von „Bergkuppen“ oder „Talsohlen“ gefragt werden.

Wird eine der Variablen, z. B. x_2, konstant gehalten, so ist y eine gewöhnliche Funktion der anderen Variablen x_1. Der zugehörige Graph ist die Schnittkurve der Fläche mit einer Parallelen zur (x_2, y)–Ebene. Die Ableitung von y nach x_1 gibt die Steigung dieser Schnittkurve an. Ableitungen nach eine Variablen bei Konstanthaltung der übrigen unabhängigen Variablen heißen **„partielle Ableitungen“**.

Bezeichnungen: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$ bzw. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ oder f_{x_1}

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1 x_1}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = y_{x_1 x_2}$$

Für höhere (stetige) Ableitungen gilt der **Satz von Schwarz**:

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist gleichgültig.

Beispiel: $y = \dfrac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad y_{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \qquad y_{x_1 x_2} = \dfrac{-1}{x_2^2}$

$$y_{x_2} = \frac{-x_1}{x_2^2} \qquad y_{x_2 x_1} = \frac{-1}{x_2^2}$$

8.3 Das totale Differential

Bei Funktionen einer Veränderlichen $y = f(x)$ haben wir die Änderung Δy bei kleinen Änderungen $\Delta x = dx$ durch das Differential angenähert:

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot dx \tag{1}$$

Entsprechend lässt sich die Änderung einer Funktion von mehreren Variablen $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch das **totale Differential** annähern:

$$\Delta y \approx dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot dx_i \tag{2}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \partial y/\partial x_1 \\ \partial y/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial y/\partial x_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{dr} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

wird Gl. (2):

$$dy = \vec{g} \cdot \vec{dr}$$

Der Vektor $\vec{g}$ heißt **Gradient** der Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und dy wird am größten, wenn $\vec{dr}$ in Richtung des Gradienten zeigt (Richtung des steilsten Anstiegs).

Beispiel: $y = \pi \cdot x_1^2 \cdot x_2$ (Zylindervolumen)

$$dy = \pi \cdot 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot dx_1 + \pi \cdot x_1^2 \cdot dx_2$$

Sei $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ $dx_1 = dx_2 = 0.1$

$$dy = \pi \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1) = \pi \cdot 1.6$$

$$\Delta y = \pi \cdot (2.1^2 \cdot 3.1 - 4 \cdot 3) = \pi \cdot 1.67$$

8.4 Extremwerte

Eine Fläche $y = f(x_1, x_2)$ kann sicher nur dort Extremwerte haben, wo beide partiellen Ableitungen gleich null sind. Wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen sind diese Bedingungen zwar notwendig, aber nicht hinreichend: es könnte auch ein Sattelpunkt vorliegen (s. Skizze).

Die Bedingungen für Extremwerte einer Funktion $y = f(x_1, x_2)$ sind:

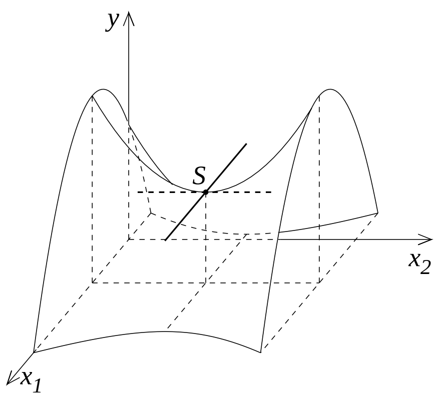
$$\text{Extremwert:} \quad \begin{cases} f_{x_1} = f_{x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_{1E}, x_{2E}) \qquad \text{(mögliche Lage)} \\ f_{x_1x_1}(x_{1E}, x_{2E}) \cdot f_{x_2x_2}(x_{1E}, x_{2E}) - f^2_{x_1x_2}(x_{1E}, x_{2E}) > 0 \end{cases}$$

Maximum: $f_{x_1x_2}(x_{1E}, x_{2E}) < 0$

Minimum: $f_{x_1x_2}(x_{1E}, x_{2E}) > 0$

Beispiel: (s. Skizze)

$$y = f(x_1, x_2) = b(x_2 - x_{20})^2 - a(x_1 - x_{10})^2 + c$$



mit
$a = -0.015$
$b = 0.020$
$c = 1.2$
$x_{10} = 1.5$
$x_{20} = 1.5 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & f_{x_1}(x_{1E}) = -2a(x_{1E} - x_{10}) = 0 && \Rightarrow x_{1E} = x_{10} \\ & f_{x_1}(x_{1E}) = 2b(x_{2E} - x_{20}) = 0 && \Rightarrow x_{2E} = x_{20} \\ & f_{x_1x_1} = -2a \\ & f_{x_2x_2} = 2b \\ & f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 0 \\ & \Rightarrow f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} - f^2_{x_1x_2} < 0, \quad \text{also kein Extremwert} \end{aligned}$$

9 Fehler- und Ausgleichsrechnung

Soll eine Größe durch Messung ermittelt werden, so wird die Messung mehrmals ausgeführt und daraus ein „Bestwert“ berechnet **(Ausgleichsrechnung)**.

Neben der Größe selbst wird aus den Messungen noch der Messfehler berechnet **(Fehlerrechnung)**.

Die Fehlerrechnung behandelt nur die **zufälligen**, nicht die systematischen Fehler.

Als Kriterium für die Berechnung eines „Bestwertes“ wird seit Gauß allgemein die Summe der Fehlerquadrate gewählt und minimiert **(Methode der kleinsten Fehlerquadrate)**.

Bei einer Messgröße ist der „Bestwert“ dann der Mittelwert.

9.1 Eine direkt messbare Größe

Die Größe y sei n mal gemessen worden mit den Ergebnissen $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Abkürzungen: $[\,y\,] = \sum_{i=1}^{n} y_i$ **(Gaußklammer)**

$v_i = y_i - \overline{y}$

Mittelwert

$$\boxed{\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{[\,y\,]}{n}} \tag{1}$$

Mittlerer Fehler der Einzelmessung

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\frac{[\,v \cdot v\,]}{n-1}} = \sqrt{\frac{n \cdot [\,y \cdot y\,] - [\,y\,]^2}{n \cdot (n-1)}}} \tag{2}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$\boxed{\Delta \overline{y} = \sqrt{\frac{[\,v \cdot v\,]}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{n \cdot [\,y \cdot y\,] - [\,y\,]^2}{n^2 \cdot (n-1)}} = \frac{\Delta y}{\sqrt{n}}} \tag{3}$$

9.2 Eine nicht direkt messbare Größe

Beispiel: Querschnitt eines Rohres: $A = \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)$
d_a und d_i werden gemessen.

Allgemein: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Die direkt messbaren Größen x_1 bis x_m werden wiederholt gemessen, nach (1) ausgeglichen (Mittelwert $\overline{x}_k$) und nach (3) ihre Fehler $\Delta\overline{x}_k$ berechnet.

Der Fehler Δy der Größe y wird dann nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz** berechnet.

Es sind zwei Fassungen gebräuchlich:

Größtfehler (maximaler Fehler)

$$\boxed{\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \Delta \overline{x}_k \right|} \tag{4}$$

Mittlerer Fehler

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \Delta \overline{x}_k \right)^2}} \tag{5}$$

Der Größtfehler ist einfacher zu berechnen, überschätzt aber bei größerem m den tatsächlichen Fehler. Eine statistische Fehleranalyse liefert (5).

9.3 Relativer Fehler

Häufig wird statt des Fehlers Δy einer Größe y das Verhältnis aus Fehler und Größe angegeben. Dieses Verhältnis heißt **relativer Fehler**. Zur Unterscheidung davon heißt Δy **absoluter Fehler**.

Relativer Fehler $\qquad \dfrac{\Delta y}{y}$

Relativer prozentualer Fehler $\qquad \dfrac{\Delta y}{y} \cdot 100\%$

9.4 Relativer Fehler bei Produkt oder Quotient

Lässt sich die zu berechnende Größe y als Produkt

$$y = A \cdot x_1^m \cdot x_2^n \qquad \text{(A eine Konstante)} \tag{6}$$

oder als Quotient

$$y = A \cdot \frac{x_1^m}{x_2^n} \tag{7}$$

darstellen, so gilt für den relativen Fehler (folgt aus (4) und (5))

Relativer Größtfehler (Für Produkt oder Quotient)

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = m \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + n \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|} \tag{8}$$

Mittlerer relativer Fehler (Für Produkt oder Quotient)

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(m \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(n \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} \right)^2}} \qquad \text{(Achtung: } m \text{ und } n \text{ werden quadriert)} \tag{9}$$

Entsprechendes gilt bei mehreren Faktoren.

Regel: Ist y eine **Summe** (oder **Differenz**), so addieren sich die **absoluten Fehler**.
Ist y ein **Produkt** (oder **Quotient**), so addieren sich die **relativen Fehler**.

9.5 Ausgleichsgerade

Besteht zwischen zwei direkt messbaren Größen x und y eine lineare Beziehung:

$$y = a \cdot x + b \tag{10}$$

so können mit Hilfe der Ausgleichsrechnung die (konstanten) Größen a und b sowie deren mittlere Fehler Δa und Δb berechnet werden.

Durch Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate erhält man bei n Messwerten für x und y:

$$\boxed{a = \frac{[\,x \cdot y\,] \cdot n - [\,x\,] \cdot [\,y\,]}{[\,x \cdot x\,] \cdot n - [\,x\,]^2}, \qquad b = \frac{[\,y\,] - a \cdot [\,x\,]}{n}} \tag{11}$$

$$\Delta a = m \cdot \sqrt{\frac{n}{[\,x \cdot x\,] \cdot n - [\,x\,]^2}}, \qquad \Delta b = m \cdot \sqrt{\frac{[\,x \cdot x\,]}{[\,x \cdot x\,] \cdot n - [\,x\,]^2}} \tag{12}$$

mit $m = \sqrt{\frac{[\,v \cdot v\,]}{n-2}}$ (s. (3)) (s. a. Bartsch S. 452: Ausgleichsgerade)

9.6 Ausgleichsparabel

(Bartsch S. 453)

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \tag{13}$$

Die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 sind aus folgendem linearen Gleichungssystem zu ermitteln:

$$\begin{aligned} n \cdot a_0 + [\,x\,] \cdot a_1 + [\,x^2\,] \cdot a_2 &= [\,y\,] \\ [\,x\,] \cdot a_0 + [\,x^2\,] \cdot a_1 + [\,x^3\,] \cdot a_2 &= [\,x \cdot y\,] \\ [\,x^2\,] \cdot a_0 + [\,x^3\,] \cdot a_1 + [\,x^4\,] \cdot a_2 &= [\,x^2 \cdot y\,] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= \frac{(n[x^2] - [x]^2)(n[x^2y] - [x^2][y]) - (n[x^3] - [x][x^2])(n[xy] - [x][y])}{(n[x^2] - [x]^2) \cdot (n[x^4] - [x^2]^2) - (n[x^3] - [x][x^2])^2} \\ a_1 &= \frac{n \cdot [x \cdot y] - [x] \cdot [y] - a_2 \cdot (n \cdot [x^3] - [x] \cdot [x^2])}{n \cdot [x^2] - [x]^2} \\ a_0 &= \frac{[y] - a_1 \cdot [x] - a_2 \cdot [x^2]}{n} \end{aligned}} \tag{15}$$

Anmerkung: Für $a_2 = 0$ folgt (11) aus den letzten beiden Gleichungen.

10 Integralrechnung

10.1 Unbestimmtes Integral

10.1.1 Einführung und Definitionen

Aufgabe der Differentialrechnung ist es, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ zu berechnen.
Eine Möglichkeit zur Einführung der Integralrechnung ist ihre Definition als Umkehrung der Differentialrechnung: zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist eine Funktion $F(x)$ zu bestimmen, so dass gilt:

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Eine solche Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** zu $f(x)$. Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist, dann ist jede Funktion $G(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion, wenn C eine Konstante ist. Für $F(x)$ wird geschrieben:

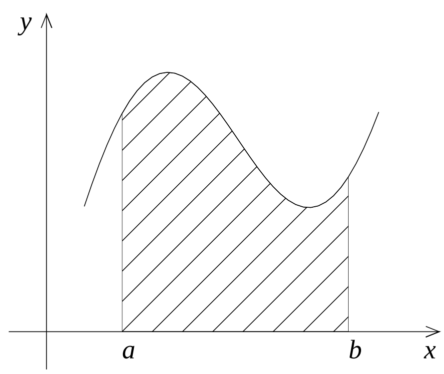
$$F(x) + C = \int f(x)\,dx \tag{2}$$

Die rechte Seite der Gleichung heißt **unbestimmtes Integral**. Die Konstante C auf der linken Seite bringt zum Ausdruck, dass die Grundaufgabe der Integralrechnung, eine Stammfunktion zu bestimmen, nicht eindeutig lösbar ist.

Eine zweite Möglichkeit, die Integralrechnung einzuführen, bietet die Aufgabe, die Fläche A zu berechnen, die vom Graphen von $f(x)$, der x–Achse und zwei Parallelen zur y–Achse eingeschlossen wird. Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar und führt auf das **bestimmte Integral**

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Wir führen die Integralrechnung über die erste Methode ein und leiten daraus das Flächenproblem als **Hauptsatz der Integralrechnung** ab.



10.1.2 Elementare Integrationsregeln

Integrationsregeln erhält man durch die Umkehrung der Differentiationsregeln.

1. **Konstanter Faktor:**
$$\int (c \cdot f(x))\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

2. **Summe oder Differenz:**
$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Die Umkehrung von Produkt– und Kettenregel sind nicht so einfach (siehe Abschnitt 10.1).

10.1.3 Grundintegrale

Die unbestimmten Integrale der elementaren Funktionen lassen sich sofort angeben, wenn sie in der Tabelle 7.2.3 in der Spalte „Ableitung“ vorkommen.
Für die Herleitung der übrigen Integrale sind weitere Integrationsregeln erforderlich.

Funktion	Integral	Bemerkung	Funktion	Integral	Bemerkung
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathcal{R} \backslash \{-1\}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	x in *rad*
$\frac{1}{x}$	$\ln \|x\|$	$x \neq 0$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	x in *rad*
e^x	e^x	$x \in \mathcal{R}$	$\tan(x)$	$-\ln \|\cos(x)\|$	x in *rad*
$\ln(x)$	$x \cdot (\ln(x) - 1)$	$x \in \mathcal{R}_+$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\|x\| \leq 1$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$a \in \mathcal{R}_+ \backslash \{1\}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\|x\| \leq 1$

Tabelle 10.1.3: Grundintegrale

10.2 Anwendungen des unbestimmten Integrals

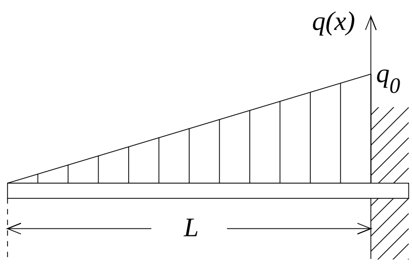
10.2.1 Statik

Bei einem Träger gibt es zwischen der Querkraft $Q(x)$ und der Streckenlast $q(x)$ den Zusammenhang

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

Für die nebenstehende Streckenlast gilt:

$$q(x) = \frac{q_0}{L} \cdot x$$



Wie ist der Querkraftverlauf?

$$Q(x) + C = \int (-\frac{q_0}{L} \cdot x)\, dx = -\frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^2}{2}$$

Die Konstante C muss aus den Randbedingungen ermittelt werden; für $x = 0$ gilt:

$$Q(0) + C = 0 \qquad \text{und} \qquad Q(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

10.2.2 Kinematik

Zwischen zurückgelegtem Weg s und der momentanen Geschwindigkeit v besteht die Beziehung

$$\frac{ds}{dt} = v$$

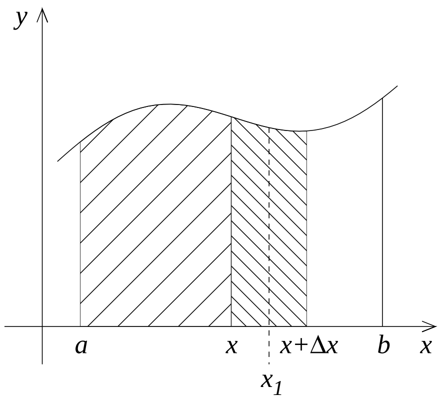
Die Geschwindigkeit habe den Verlauf $v(t) = t^2$. Welcher Weg ist nach 10 Sekunden zurückgelegt?

$$s + C = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$$

Für $t = 0$: $s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad s(10) = \frac{1000}{3}$

10.3 Bestimmtes Integral

Die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ zwischen a und b sei A. Die Fläche zwischen den Stellen a und x ist eine Funktion $F(x)$. Es soll gezeigt werden, dass gilt: $F'(x) = f(x)$.
Für das Flächenstück zwischen x und $x + \Delta x$ kann man schreiben



$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x \cdot f(x_1) \qquad (4)$$

mit $x_1 \in [x, x + \Delta x]$ oder

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x_1) \qquad (5)$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt aber

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x_2) \qquad \text{mit} \quad x_2 \in [x, x + \Delta x]. \qquad (6)$$

Für $\Delta x \to 0$ folgt daraus

$$F'(x) = f(x) \qquad (7)$$

Somit gilt für die Fläche $F(x)$

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx \qquad (8)$$

Für $x = a$ ist: $\quad F(a) = 0 \quad \Rightarrow C = \int f(x)\,dx|_{x=a} \qquad (9)$

Für $x = b$ ist: $\quad F(b) = A \quad \Rightarrow A + C = \int f(x)\,dx|_{x=b} \qquad (10)$

Daraus folgt $\quad A = \int f(x)\,dx|_{x=b} - \int f(x)\,dx|_{x=a} = F(b) - F(a) \qquad (11)$

Für den mittleren Teil der Gleichung schreibt man abkürzend

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (12)$$

und nennt diesen Ausdruck **bestimmtes Integral**.
Die eben abgeleitete Beziehung heißt

Hauptsatz der Integralrechnung:

Die Fläche, die begrenzt wird durch den Graphen von $f(x)$, die x–Achse und die beiden Parallelen zur y–Achse $x = a$ und $x = b$ wird berechnet durch das bestimmte Integral

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

wobei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$ ist.

10.4 Integrationsregeln

10.4.1 Allgemeines

Mit bei der Differentialrechnung in Abschnitt 7.2 angegebenen Regeln können alle aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktionen differenziert werden. Für die Integralrechnung gibt es keine derartig vollständigen Regeln. Das liegt in der Natur der Sache: es gibt ganz einfache Funktionen, zu denen es keine elementare Stammfunktion gibt:

$$\sin(x^2), \qquad e^{x^2}, \qquad \frac{\sin x}{x}$$

Trotzdem sind die folgenden Regeln in vielen praktischen Fällen von Nutzen, allerdings kann man einem Integral nicht ohne weiteres ansehen, welche Methode zum Ziele führen wird.
Häufig werden die Regeln nur zu einer Vereinfachung des Integrals benutzt, um dann in einer Integraltafel nachzuschlagen. Vor der Anwendung von Integrationsregeln empfiehlt sich immer ein Blick in eine Integraltafel.

10.4.2 Substitution

Die Substitutionsregel ist eine Umkehrung der Kettenregel. Wie bei der Kettenregel wird in die zu integrierende Funktion $f(x)$ eine Hilfsgröße $z(x)$ eingeführt.
Die Substitutionsregel heißt:

$$\int f(z(x)) \cdot z'(x)\,dx = \int f(z)\,dz = F(z) + C \tag{13}$$

mit $F'(z) = f(z)$.
Dies soll an einem Beispiel erläutert werden. Das Integral

$$\int (3 \cdot x - 5)^5\,dx$$

könnte durch Ausmultiplizieren gliedweise integriert werden, ebenso wie

$$f(x) = (3 \cdot x - 5)^5$$

durch Ausmultiplizieren auch ohne Kettenregel differenziert werden könnte.
Die Substitution bringt hier jedoch Vorteile, in komplizierteren Fällen ist sie unerlässlich. Sei

$$z = 3 \cdot x - 5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{dz}{3}$$

Daraus folgt

$$\int (3 \cdot x - 5)^5 \, dx = \int z^5 \cdot \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^6}{6} = \frac{(3 \cdot x - 5)^6}{18}$$

Für die Substitutionsfunktion $z(x)$ müssen drei Voraussetzungen erfüllt sein:

a) $z(x)$ ist differenzierbar,

b) $z'(x)$ ist stetig,

c) $z'(x) \neq 0$ im Integrationsintervall.

Bei bestimmten Integralen kann die Rücksubstitution von z nach x entfallen, wenn man die Grenzen mitsubstituiert.

Beispiel:

$$\int_0^1 \sqrt{3 \cdot x + 1} \, dx = \int_1^4 \sqrt{z} \cdot \frac{dz}{3} = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{9} \cdot (8 - 1) = \frac{14}{9}$$

Die Substitutionsregel ist schwierig in der Anwendung, da nicht immer zu erkennen ist, wie man $z(x)$ zweckmäßig zu wählen hat.

Beispiel: $I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

Versuch: $z = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x} = \frac{dz}{2 \cdot \sqrt{z - 1}}$

Damit folgt $I = \int \frac{\sqrt{z}}{2 \cdot \sqrt{z - 1}} \, dz = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{\frac{z}{z - 1}} \, dz = ?$

Ein Nachschlagen in der Integraltafel liefert:

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{x^2 + 1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right]$$

Häufig wird die Substitution umgekehrt versucht: man ersetzt x durch eine Funktion in t: $x = f(t)$.

Beispiel: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Substitution:

$$x = \sin(t); \qquad \sqrt{1 - x^2} = \cos(t);$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos(t); \qquad dx = \cos(t) \, dt \qquad \Rightarrow \qquad I = \int \frac{\cos(t) \, dt}{\cos(t)} = t = \arcsin(x)$$

Einige spezielle Substitutionen sind in Tabelle 10.4.2 angegeben.

$f(x)$ enthält Terme	Substitution	dx	Rücksubstitution
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot \sin(t)$	$a \cdot \cos(t)\ dt$	$t = \arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \cdot \tan(t)$ $x = a \cdot \sinh(t)$	$\frac{a\ dt}{\cos^2(t)}$ $a \cdot \cosh(t)\ dt$	$t = \arctan(\frac{x}{a})$ $t = \operatorname{arcsinh}(\frac{x}{a})$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = \frac{a}{\cos(t)}$ $x = a \cdot \cosh(t)$	$\frac{a \cdot \sin(t)\ dt}{\cos^2(t)}$ $a \cdot \sinh(t)\ dt$	$t = \arccos(\frac{a}{x})$ $t = \operatorname{arccosh}(\frac{x}{a})$
$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$	$x = 2 \cdot \arctan(t)$ $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2\ dt}{1+t^2}$	$t = \tan(\frac{x}{2})$

Tabelle 10.4.2: Spezielle Substitutionen

10.4.3 Partielle Integration

Die partielle Integration ist eine Umkehrung der Produktregel:

$$\begin{aligned} & (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (14) \\ \Rightarrow \quad & u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx \qquad (15)$$

Damit hat man nur eine teilweise (partielle) Integration erreicht: Man hat das Problem von $u \cdot v'$ auf $u' \cdot v$ verschoben. Den Wert dieser Verschiebung erkennt man am besten an Beispielen.

Beispiel 1: $I = \int \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ v'}}{e^x}\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = xe^x - e^x = e^x \cdot (x-1)$

Beispiel 2:

$$I = \int \ln(x)\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ v'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{\ln(x)}\, dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot (\ln(x) - 1)$$

Beispiel 3: Bestimmtes Integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)\, dx = \Big[x^2 \cdot (-\cos(x))\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2 \cdot x \cdot \cos(x)\, dx \\ &= \pi^2 - 0 + [2 \cdot x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \cdot \sin(x)\, dx \\ &= \pi^2 + 0 + [2 \cdot \cos(x)]_0^\pi = \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Strategie: v' muss natürlich so gewählt werden, dass v bekannt ist. u ist so zu wählen, dass $u' \cdot v$ einfacher wird, also im letzten Beispiel nicht $v' = x^2$ wählen.

10.4.4 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist anwendbar auf gebrochen rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{16}$$

mit $P(x)$ und $Q(x)$ ganzrational.
Ist der Grad m von $P(x)$ größer als der Grad n von $Q(x)$, so lässt sich $f(x)$ nach **Partialdivision** schreiben als:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)} \tag{17}$$

wobei der Grad von $P_2(x)$ kleiner als n ist.
Da die Integration von $P_1(x)$ keine Schwierigkeiten bereitet, soll im folgenden $m < n$ angenommen werden. Zusätzlich fordern wir, dass der Koeffizient von x^n bei $Q(x)$ $a_n = 1$ ist, d. h.

$$Q(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{18}$$

Ziel der Partialbruchzerlegung ist es, $f(x)$ so in eine Summe von Brüchen (Partialbrüchen) umzuformen, dass jeder Partialbruch für sich integriert werden kann.
Für diese Umformung müssen die Nullstellen des Nenners $Q(x)$ bestimmt werden. Von der Art dieser Nullstellen hängt die Form der Partialbrüche ab. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $Q(x)$ n Nullstellen. Wir unterscheiden dabei aber vier Fälle:

1. Einfache reelle Nullstellen (alle Nullstellen sind paarweise verschieden)
2. Mehrfache reelle Nullstellen
3. Einfache komplexe Nullstellen
4. Mehrfache komplexe Nullstellen

Im folgenden werden nur die ersten drei Fälle behandelt. Das Vorgehen bei der Partialbruchzerlegung kann in drei Schritte eingeteilt werden:

a) Bestimmung aller Nullstellen des Nenners

b) Bestimmung der Partialbrüche

c) Integration der Partialbrüche

Fall 1: Einfache reelle Nullstellen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Rightarrow Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \tag{19}$$

Für $f(x)$ ist die Zerlegung möglich:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n} \tag{20}$$

wobei A_1 bis A_n Konstanten sind.

Die Bestimmung dieser Konstanten erfolgt am besten nach einer Umformung durch Einsetzen der Nullstellen x_1 bis x_n in die Zähler beider Seiten:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)}{Q(x)} + \ldots \\ \ldots + \frac{A_n \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \ldots \cdot (x-x_{n-1})}{Q(x)}\end{aligned} \tag{21}$$

Einsetzen von $x = x_1$ (Zählervergleich):

$$P(x_1) = A_1 \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)$$

(da alle anderen Summanden gleich Null sind). Daraus folgt sofort A_1. Ebenso ermittelt man die übrigen Koeffizienten A_2 bis A_n.

Beispiel:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\, dx$$

a) Nullstellen:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1 \text{ (raten)} & \Rightarrow & x^2 + 4x + 3 = 0 & \\ \Rightarrow \quad x_2 = -1 \,;\, x_3 = -3 & & \Rightarrow & \textbf{Fall 1} \end{array}$$

b) Partialbrüche:

$$\frac{2x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+3) + B \cdot (x-1) \cdot (x+3) + C \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$$\begin{array}{rclrcllrcl} x & = & 1: & 8 & = & A \cdot 2 \cdot 4 & \Rightarrow & A & = & 1 \\ x & = & -1: & 4 & = & B \cdot (-2) \cdot 2 & \Rightarrow & B & = & -1 \\ x & = & -3: & 16 & = & C \cdot (-4) \cdot (-2) & \Rightarrow & C & = & 2 \end{array}$$

c) Integration:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\, dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2}{x+3}\, dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 \cdot \ln|x+3| \\ &= \ln\left|\frac{(x-1) \cdot (x+3)^2}{x+1}\right|\end{aligned}$$

Fall 2: Mehrfache reelle Nullstellen
Sei x_1 eine Nullstelle der Vielfachheit k. Dann heißen die ersten k Partialbrüche:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} \tag{22}$$

Diese Form gilt auch für den Fall $k = 1$. Entsprechendes gilt für andere mehrfache Nullstellen.

Beispiel:

$$\int \frac{x^2 + 6x - 13}{(x-2)^2 \cdot (x+1)}\, dx$$

a) Nullstellen:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = 2; \\ &x_3 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Fall 2} \end{aligned}$$

b) Partialbrüche:
Da es nicht mehr n verschiedene Nullstellen gibt, können die n Koeffizienten nicht alle durch Einsetzen der Nullstellen ermittelt werden. Dazu wählt man weitere (einfache) Werte.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 6x - 13}{(x-2)^2 \cdot (x+1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A \cdot (x-2) \cdot (x+1) + B \cdot (x+1) + C \cdot (x-2)^2}{(x-2)^2 \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rclrclcrcl} x &=& 2: & 3 &=& B \cdot 3 & \Rightarrow & B &=& 1 \\ x &=& -1: & -18 &=& C \cdot 9 & \Rightarrow & C &=& -2 \\ x &=& 0: & -13 &=& A \cdot (-2) + 1 - 8 & \Rightarrow & A &=& 3 \end{array}$$

c) Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 6x - 13}{(x-2)^2 \cdot (x+1)}\, dx &= \int \frac{3}{x-2}\, dx + \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{2}{x+1}\, dx \\ &= 3 \cdot \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - 2 \cdot \ln|x+1| \\ &= \ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right| - \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

Fall 3: Einfache komplexe Nullstellen

Prinzipiell könnte beim Vorliegen von komplexen Nullstellen eine Zerlegung in komplexe Partialbrüche vorgenommen werden. Da die zu integrierende Funktion jedoch reell ist, muss auch das Ergebnis reell sein. Daher kann es zweckmäßig sein, die komplexe Rechnung zu vermeiden. Komplexe Nullstellen treten immer paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auf. Diese sind dann Lösung einer Gleichung:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \tag{23}$$

Die beiden Partialbrüche zu den konjugiert komplexen Nullstellen werden zu einem Bruch zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} &= \frac{(A+B) \cdot x - A \cdot x_2 - B \cdot x_1}{x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{P \cdot x + Q}{x^2 + p \cdot x + q} \end{aligned} \tag{24}$$

Beispiel:

$$\int \frac{5x^2+4x+3}{x^3+2x^2+3x+2}\,dx$$

a) Nullstellen:

$$\begin{array}{llll} x_1 = -1 & \Rightarrow & x^2+x+2=0; & \\ x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-2} & & & \Rightarrow \quad \textbf{Fall 3} \end{array}$$

b) Partialbrüche:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+4x+3}{x^3+2x^2+3x+2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{P\cdot x+Q}{x^2+x+2} \\ &= \frac{A\cdot(x^2+x+2)+(P\cdot x+Q)\cdot(x+1)}{x^3+2x^2+3x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllrcllrcl} x &=& -1: & 4 &=& A\cdot 2 & \Rightarrow & A &=& 2 \\ x &=& 0: & 3 &=& 4+Q & \Rightarrow & Q &=& -1 \\ x &=& 1: & 12 &=& 8+(P-1)\cdot 2 & \Rightarrow & P &=& 3 \end{array}$$

c) Integration:

$$\int \frac{5x^2+4x+3}{x^3+2x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3x-1}{x^2+x+2}\,dx$$

$$= 2\cdot \ln|x+1| + \frac{3}{2}\cdot \ln|x^2+x+2| - \frac{5}{\sqrt{7}}\cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$$

(siehe Bartsch S. 319, Nr. 19a)

Zusammenfassung: Die Integrale sind:

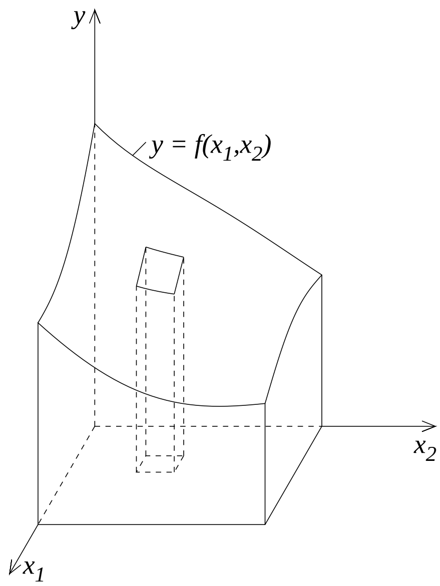
Fall 1: $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_i}\,dx = \ln|x-x_i|$

Fall 2: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_i)^k}\,dx = \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}}, \quad k>1$

Fall 3:
$$\begin{aligned} \int \frac{P\cdot x+Q}{x^2+p\cdot x+q}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{P\cdot(2x+p)+2Q-P\cdot p}{x^2+p\cdot x+q}\,dx \\ &= \frac{P}{2}\ln|x^2+p\cdot x+q| + \frac{2Q-P\cdot p}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) \end{aligned}$$

10.5 Mehrfache Integrale

Eine Funktion $y = f(x_1, x_2)$ kann im Raum immer als Fläche gedeutet werden (s. Kap. 8). Gibt man in der (x_1, x_2)–Ebene eine Fläche vor, z. B. das Rechteck in nebenstehender Abbildung, so kann man nach dem Volumen fragen, das unten von der (x_1, x_2)–Ebene, oben von der Fläche $y = f(x_1, x_2)$ und den vier auf der (x_1, x_2)–Ebene senkrecht stehenden Ebenen begrenzt wird. Zerlegen wir das Volumen in schlanke Säulen mit der Grundfläche $dx_1 \cdot dx_2$, so gilt für das Volumen der Säule näherungsweise:



$$\Delta V \approx dV = f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \qquad (25)$$

Für das gesamte Volumen folgt dann:

$$V = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 \qquad (26)$$

Falls die Begrenzung der „Grundfläche“ in der (x_1, x_2)–Ebene kein Rechteck ist, hängen a_2 und b_2 von x_1 ab (vergleiche die folgenden Beispiele).

Beispiel 1: Halbkugel

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \sqrt{r^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2} \\
V &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-{x_1}^2}}^{\sqrt{r^2-{x_1}^2}} \sqrt{r^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2}\, dx_2 \right) dx_1 \\
&= 4 \cdot \int_0^r \frac{1}{2} \cdot \left[x_2 \cdot \sqrt{r^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2} + (r^2 - {x_1}^2) \cdot \arcsin\left(\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - {x_1}^2}} \right) \right]_0^{\sqrt{r^2-{x_1}^2}} dx_1 \\
&= 2 \cdot \int_0^r (r^2 - {x_1}^2) \cdot \frac{\pi}{2}\, dx_1 \\
&= \pi \cdot \left[r^2 \cdot x_1 - \frac{{x_1}^3}{3} \right]_0^r \\
&= \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 \quad \surd \quad \text{(Halbkugel)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2: 3–achsiges Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad z = f(x, y) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
V &= 8 \cdot \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{b\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dy \right) dx \\
&= 8 \cdot c \cdot \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1-u^2-v^2} \cdot b\, dv \right) \cdot a\, du \qquad \text{mit} \quad u = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{b} \\
&= 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} \left[v \cdot \sqrt{1-u^2-v^2} + (1-u^2) \cdot \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]_0^{\sqrt{1-u^2}} \right) du \\
&= 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^1 (1-u^2) du \quad = \quad \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c
\end{aligned}
$$

10.6 Näherungsweise Integration

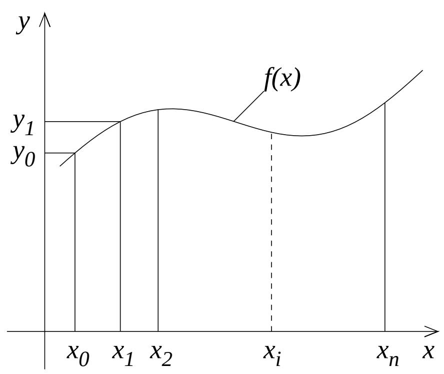
10.6.1 Allgemeines

Aus Abschnitt 10.4 ist zu entnehmen, dass die Berechnung eines Integrals erheblich mehr Arbeit bedeuten kann als die Berechnung einer Ableitung. Außerdem gibt es ganz einfache Funktionen ohne elementare Stammfunktion.
Zur Berechnung von bestimmten Integralen werden daher häufig Näherungsverfahren benutzt. Bei den hier besprochenen Verfahren wird die zu integrierende Funktion durch eine ganzrationale Funktion angenähert, deren Integration dann einfach ist.

10.6.2 Trapezregel

Das Integrationsintervall $[a,\ b] = [x_0,\ x_n]$ wird in n Teilintervalle eingeteilt und der Integrand $f(x)$ wird abschnittweise durch Geraden angenähert. Die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ wird also ersetzt durch eine Summe von Trapezen. Das führt zu der Flächenformel:

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot (y_0 + y_1) \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + \frac{1}{2} \cdot (y_{n-1} + y_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \qquad (27)
\end{aligned}
$$



Bei der Trapezformel brauchen die Teilpunkte x_i nicht äquidistant im Intervall $[x_0,\ x_n]$ zu liegen. Ist das jedoch erfüllt, dann sind alle Differenzen $(x_i - x_{i-1}) = (x_n - x_0)/n$ und sie können ausgeklammert werden:

$$A \approx \frac{x_n - x_0}{2 \cdot n} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n) \qquad (28)$$

oder

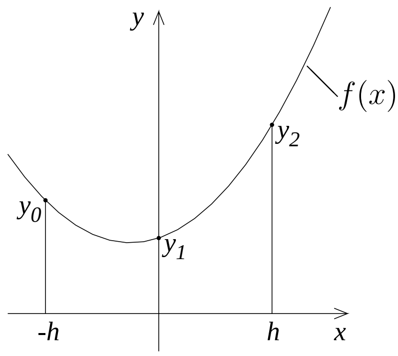
$$A \approx \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot y_n\right) \tag{29}$$

Dies ist die **Trapezformel**.

10.6.3 Simpsonverfahren

Beim Simpsonverfahren wird das Integrationsintervall $[x_0,\ x_n]$ in eine gerade Anzahl n von gleich großen Teilintervallen der Breite $h = (x_n - x_0)/n$ eingeteilt. Über je zwei Teilintervalle wird $f(x)$ durch eine quadratische Parabel angenähert:

$$f(x) \approx a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{30}$$



Die Koeffizienten a, b und c lassen sich eindeutig aus den drei zu den zwei Teilintervallen gehörenden Funktionswerten berechnen. Dazu werde ein Teilintervallpaar herausgegriffen und das Koordinatensystem in die Mitte verschoben, wodurch sich die Fläche unter der Kurve ja nicht ändert. Die Funktionswerte seien y_0, y_1 und y_2. Dann lassen sich sofort die drei Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{rclrcl}
x &=& -h: & a \cdot h^2 - b \cdot h + c &=& y_0 \\
x &=& 0: & c &=& y_1 \\
x &=& h: & a \cdot h^2 + b \cdot h + c &=& y_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & 2 \cdot (a \cdot h^2 + c) &=& y_0 + y_2 \\
& 4 \cdot c &=& 4 \cdot y_1 \\
\Rightarrow & 2 \cdot (a \cdot h^2 + 3 \cdot c) &=& y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2
\end{array}$$

Für die Fläche unter der Parabel gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-h}^{h} (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)\, dx \\
&= \left[\frac{a}{3} \cdot x^3 + \frac{b}{2} \cdot x^2 + c \cdot x\right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{2}{3}(a \cdot h^3 + 3 \cdot c \cdot h) \\
&= \frac{2}{3} \cdot h \cdot (a \cdot h^2 + 3 \cdot c)
\end{aligned}$$

Setzt man für den rechten Klammerausdruck das obige Ergebnis ein, so folgt mit
$h = (x_n - x_0)/n$

$$\boxed{A = \int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{x_n - x_0}{3 \cdot n} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + \ldots + 4 \cdot y_{n-1} + y_n)} \tag{31}$$

Dies ist die Formel nach **Simpson**.

10.6.4 Integration durch Reihenentwicklung

Eine andere Methode der näherungsweisen Integration ergibt sich durch eine Annäherung des Integranden durch eine Potenzreihe (s. Kap. 16), die dann wieder leicht integriert werden kann.

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (x-a)^i \qquad \text{mit} \qquad c_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{d^i f(x)}{dx^i} \right)_{|x=a} \tag{32}$$

(siehe Bartsch S. 400).

10.6.5 Weitere Methoden

Es sollen zwei weitere (effektive) Methoden für die Berechnung von bestimmten Integralen genannt werden.

Gauß
Das Verfahren von Gauß basiert auf der Approximation der gegebenen Funktion $f(x)$ durch Polynome höherer Ordnung. Die oben beschriebene Simpson–Methode berechnet 3 Funktionswerte zur Integration über ein Intervall. Allgemein würde man für ein Polynom vom Grad m erwarten, dass man $(m+1)$ Funktionsauswertungen benötigt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass man bei geeigneter Wahl der Stützstellen x_i mit etwa halb so vielen Werten auskommt. Allerdings sind die Stützstellen dann nicht mehr äquidistant und die Gewichte g_i für die Summe

$$\int f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot f(x_i), \qquad n = \mathrm{int}\left(\frac{m}{2}\right) + 1$$

sind nicht so einfach zu ermitteln wie beim Simspon–Verfahren. Sowohl die Stützstellen x_i als auch die Gewichte g_i sind tabelliert.

Romberg (Trapezsummenextraplolation)
Leider lassen die bisher genannten Methoden nicht erkennen wie groß der Integrationsfehler ist. Dies versucht das Verfahren von Romberg. Es basiert auf dem Trapez–Verfahren, berechnet aber nicht die Trapezsumme für nur ein einziges n sondern der Reihe nach für

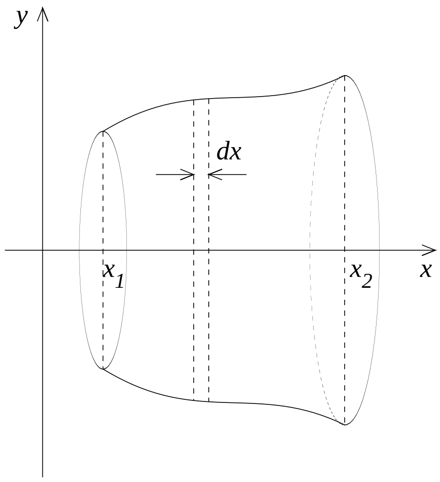
$$n_i = 2^i, \quad i = 1 \ldots m$$

Durch Vergleich der Ergebnisse und geschickte Extrapolation lassen sich bestimmte Integrale schnell und genau berechnen. Der zuletzt benutzte Wert $n_m = 2^m$ hängt von der geforderten Genauigkeit ab.

11 Anwendungen der Integralrechnung

11.1 Rauminhalte, Mantelflächen und Bogenlängen

Eine der wichtigsten Anwendungen der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten.
Von Rotationskörpern lassen sich jedoch auch die Rauminhalte durch einfache Integrale berechnen, während man für andere Körper im allgemeinen zu mehrfachen Integralen übergehen muss.
Der Rotationskörper werde in Scheiben der Dicke dx zerlegt. Das Volumen $\Delta V(x)$ einer Scheibe an der Stelle x ist dann näherungsweise:



$$\Delta V(x) \approx \pi \cdot y^2 \cdot dx = dV \tag{1}$$

Integration über alle Volumenelemente ergibt:

$$\boxed{V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx} \tag{2}$$

Die Mantelfläche der Scheibe ist:

$$\Delta M(x) \approx 2 \cdot \pi \cdot y \cdot ds \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \\ &= dx^2 \cdot (1 + y'^2) \end{aligned}$$

$$dM = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

$$\boxed{M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \, dx} \tag{3}$$

Die Länge einer gekrümmten Kurve erhält man durch Integration über alle Teilstrecken ds:

$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx} \tag{4}$$

Beispiel: Kugel

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad ; \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Halbkugelvolumen:

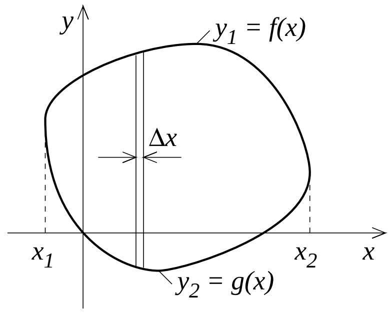
$$V_x = \pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx \quad = \quad \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \quad = \quad \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \checkmark$$

Halbkugeloberfläche:

$$\begin{aligned} M_x &= 2\cdot\pi\cdot\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\ &= 2\cdot\pi\cdot\int\limits_0^r r\,dx \quad = \quad 2\cdot\pi\cdot r^2 \quad \surd \end{aligned}$$

11.2 Schwerpunkte

11.2.1 Flächenschwerpunkt



Für den Schwerpunkt $S(x_s,\, y_s)$ zu endlich vielen Massenpunkten m_i mit den Koordinaten $(x_i,\, y_i)$ gilt die Bestimmungsgleichung:

$$0=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_s)\cdot m_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_s)\cdot m_i \tag{5}$$

oder aufgelöst

$$x_s=\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot m_i \quad ; \qquad y_s=\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot m_i \qquad \text{mit} \qquad m=\sum_{i=1}^{n}m_i \tag{6}$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung in der Ebene (Scheiben: Dicke $d=1$, Dichte $\varrho=1$) lässt sich die Schwerpunktkoordinate x_s näherungsweise durch Streifenbildung berechnen:

$$x_s=\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot m_i\approx\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(f(x_i)-g(x_i))\cdot\Delta x \tag{7}$$

Lässt man die Streifenbreite Δx gegen Null gehen, so geht die Summe in ein Integral über:

$$x_s=\frac{1}{m}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2}x\cdot(f(x)-g(x))\,dx \tag{8}$$

wobei die Masse m der Scheibe gleich ihrer Fläche A ist:

$$A=\int\limits_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,dx \tag{9}$$

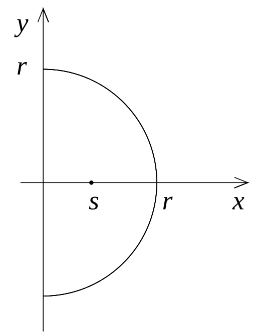
$$\boxed{x_s=\frac{\int_{x_1}^{x_2}x\cdot(f(x)-g(x))\,dx}{\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,dx}} \tag{10}$$

Für die Koordinate y_s gilt, da die Schwerpunkte der Streifen bei $\frac{1}{2}\cdot(f(x)+g(x))$ liegen:

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{m}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}\cdot(f(x)+g(x))\cdot(f(x)-g(x))\,dx \\ &= \frac{1}{2\cdot m}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2}(f^2(x)-g^2(x))\,dx \end{aligned} \tag{11}$$

$$\boxed{y_s = \frac{\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2}(f^2(x)-g^2(x))\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,dx}} \qquad (12)$$

Beispiel: Halbkreis:



$$f(x) = \sqrt{r^2-x^2} \quad ; \qquad g(x) = -\sqrt{r^2-x^2} \quad ; \qquad A = \frac{\pi}{2}\cdot r^2$$

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{2}{\pi\cdot r^2}\int_0^r 2\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{2}{\pi\cdot r^2}\int_0^{r^2}\sqrt{r^2-z}\,dz \\ &= \left[\frac{-2}{\pi\cdot r^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(r^2-z)^{3/2}\right]_0^{r^2} = \frac{-4}{3\cdot\pi\cdot r^2}\cdot(0-r^3) \\ &= \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot r \approx 0.424\cdot r \end{aligned}$$

11.2.2 Linienschwerpunkt

Der Schwerpunkt einer ebenen Kurve kann näherungsweise durch Zerlegung in Teilstücke berechnet werden:

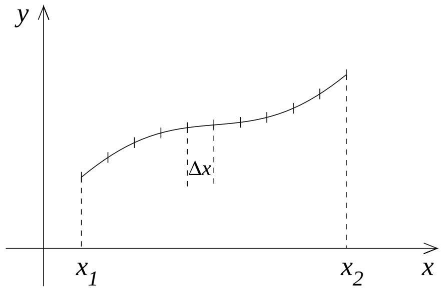
$$x_s \approx \frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\Delta s_i$$

wobei m gleich der Länge der Kurve ist.
Mit $\Delta s_i \to 0$ folgt wie in Abschnitt 1:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{L}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2} x\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx} \qquad (13)$$

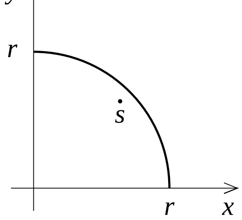
Entsprechend gilt für y_s:

$$\boxed{y_s = \frac{1}{L}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2} y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx} \qquad (14)$$



Beispiel: Viertelkreis

$$y = \sqrt{r^2-x^2} \qquad \Rightarrow \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad ; \qquad L = \frac{\pi\cdot r}{2}$$



$$\begin{aligned} x_s &= \frac{2}{\pi\cdot r}\int_0^r x\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi\cdot r}\int_0^r \frac{r\cdot x}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r^2}\frac{dz}{\sqrt{r^2-z}} = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\sqrt{r^2-z}\right]_0^{r^2} = \frac{2}{\pi}\cdot r \\ y_s &= \frac{2}{\pi\cdot r}\int_0^r y\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^r dx \\ &= \left[\frac{2}{\pi}\cdot x\right]_0^r = \frac{2}{\pi}\cdot r \end{aligned}$$

11.3 Guldinsche Regeln

Für das Volumen V_x eines Rotationskörpers gilt:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx \tag{15}$$

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$, der x–Achse und den beiden Parallelen zur y–Achse durch $x_1$und x_2 nennt man die erzeugende Fläche des Rotationskörpers. Für die Schwerpunktskoordinaten dieser Fläche gilt:

$$y_s = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx \tag{16}$$

Mit Hilfe von y_s kann man für das Volumen V_x daher auch schreiben (**1. Guldinsche Regel**):

$$\boxed{V_x = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot A} \tag{17}$$

$L = 2 \cdot \pi \cdot y_s$ ist der Weg, den der Schwerpunkt bei einer Umdrehung der erzeugenden Fläche zurücklegt. Somit kann die erste Guldinsche Regel in Worten formuliert werden (**1. Guldinsche Regel**):

$$\boxed{\text{Volumen} = (\text{Weg des Schwerpunktes}) \quad \cdot \quad (\text{erzeugende Fläche})} \tag{18}$$

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers, der durch Rotation der Kurve $f(x)$ entsteht, ist:

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot y\, dx \tag{19}$$

Mit Hilfe der Schwerpunktskoordinate y_s der erzeugenden Kurve

$$y_s = \frac{1}{L} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot y\, dx \tag{20}$$

lässt sich für M_x auch schreiben (**2. Guldinsche Regel**):

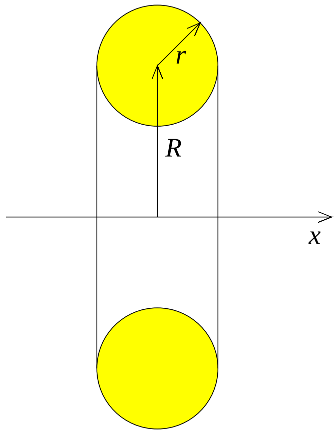
$$\boxed{M_x = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot L} \tag{21}$$

In Worten (**2. Guldinsche Regel**):

$$\boxed{\text{Mantelfläche} = (\text{Weg des Schwerpunktes}) \quad \cdot \quad (\text{Länge der Kurve})} \tag{22}$$

Mit den Guldinschen Regeln können bei bekanntem Schwerpunkt von erzeugender Fläche oder Kurve das Volumen bzw. die Mantelfläche berechnet werden. Falls jedoch das Volumen bekannt ist, kann die erste Guldinsche Regel zur Berechnung des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche benutzt werden. Dazu je ein Beispiel.

Beispiel 1: Berechnung von V_x und M_x
Nebenstehende Fläche stelle den Achsenschnitt durch einen Autoreifen dar (Torus). Die erzeugende Fläche ist ein Kreis mit dem Radius r, der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche hat den Abstand R von der Achse.



$$V_x = (2 \cdot \pi \cdot R) \cdot (\pi \cdot r^2) = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$$

Für die Mantelfläche (= Oberfläche) des Reifens gilt entsprechend:

$$M_x = (2 \cdot \pi \cdot R) \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

Beispiel 2: Berechnung der Schwerpunkte
Eine Halbkugel wird durch einen Viertelkreis erzeugt.

Fläche: $A = \frac{\pi}{4} \cdot r^2$

Länge: $L = \frac{\pi}{2} \cdot r$

$$V_x = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \qquad \Rightarrow y_s = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot r \qquad \text{(s. Bsp. 11.2.1)}$$

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \qquad \Rightarrow y_s = \frac{2}{\pi} \cdot r \qquad \text{(s. Bsp. 11.2.2)}$$

11.4 Trägheitsmoment

Für eine Menge von n Massenpunkten mit den Massen m_i und den Abständen r_i von der Drehachse wird das Massenträgheitsmoment I definiert zu:

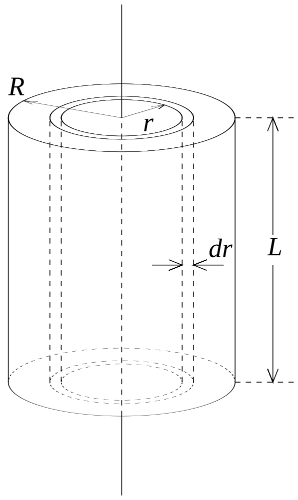
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot {r_i}^2 \tag{23}$$

Für einen ausgedehnten Körper kann das Trägheitsmoment näherungsweise durch Zerlegung in Massenelemente Δm_i berechnet werden. Für $\Delta m_i \to 0$ geht die Summe in ein Integral über:

$$I = \int r^2 \, dm \tag{24}$$

wobei das Integral über das Volumen des Körpers zu bilden ist. Formel (24) lässt sich nur für einfache Formen auswerten. Dies soll an zwei Beispielen gezeigt werden.

Beispiel 1: Zylinder: Radius R, Länge L, Dichte $\varrho = 1$
Die Massenelemente werden als Hohlzylinder gewählt:
Radius r, Dicke dr, $\Delta m_i \approx 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr$

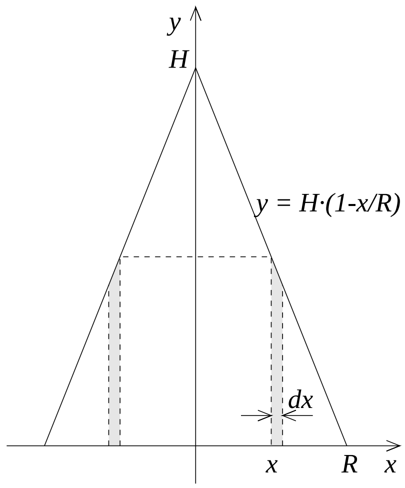


$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \, dr = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_0^R r^3 \, dr \\ &= 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \frac{R^4}{4} = \pi \cdot R^2 \cdot L \cdot \frac{R^2}{2} \\ &= M \cdot {R_t}^2 \end{aligned}$$

mit M als Gesamtmasse und $R_t = R/\sqrt{2}$ als „**Trägheitsradius**“.

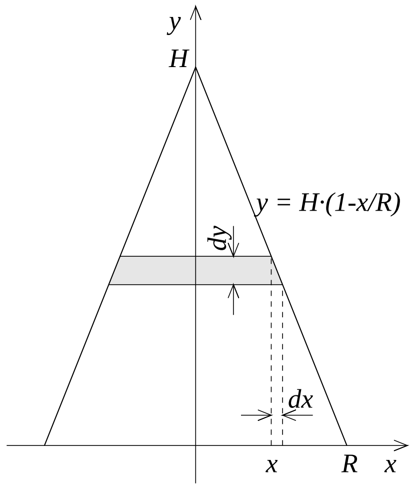
Beispiel 2: Kegel: Radius R, Höhe H, Dichte $\varrho = 1$

Lösung 1: Massenelemente als Hohlzylinder



$$\begin{aligned} \Delta m(x) &\approx 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y \cdot dx \\ &= 2 \cdot \pi \cdot x \cdot H \cdot \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot dx \\ I &= \int_0^R x^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot H \cdot \left(1 - \frac{x}{R}\right) \, dx \\ &= 2 \cdot \pi \cdot H \cdot \int_0^R \left(x^3 - \frac{x^4}{R}\right) \, dx \\ &= 2 \cdot \pi \cdot H \cdot \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5 \cdot R}\right) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot H \cdot \frac{R^4}{20} \\ &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot R^2 \\ &= 0.3 \cdot M \cdot R^2 \end{aligned}$$

Lösung 2: Massenelemente als Scheiben



$$\begin{aligned} \Delta m(x) &\approx \pi \cdot x^2 \cdot dy = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{H}{R} \cdot dx \\ I &= \int_0^R \frac{x^2}{2} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot \frac{H}{R} \, dx \end{aligned}$$

(Faktor 2: s.Beispiel 1)

$$= \frac{\pi \cdot H \cdot R^5}{2 \cdot R \cdot 5} = \frac{\pi \cdot H \cdot R^4}{10} \qquad \text{(s.o.)}$$

11.5 Arbeit

Bei Wirkung einer konstanten Kraft $\vec{F}$ längs eines Weges $\vec{s}$ ist die geleistete Arbeit W:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \tag{25}$$

Bei den meisten Vorgängen in der Technik hängt jedoch $\vec{F}$ vom Weg ab, z. B.

- Dehnung oder Stauchung einer Feder
- Beschleunigung eines Fahrzeuges mit konstanter Leistung
- Expansion eines Gases
- Anziehung eines Satelliten von der Erde

Bei veränderlicher Kraft $\vec{F}(\vec{s})$ muss Formel (25) ersetzt werden durch:

$$W = \int \vec{F}(\vec{s}) \cdot \vec{ds} \tag{26}$$

Falls die Bewegung entlang der x–Achse erfolgt und $F(x)$ die Komponente der Kraft $\vec{F}$ in x–Richtung ist, gilt

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

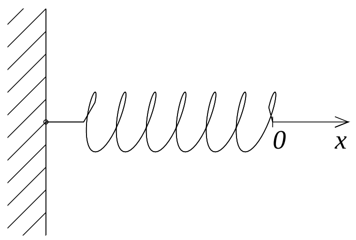
Bei nicht–geradliniger Bewegung ist die Arbeit als Linienintegral zu berechnen.
Bei bekannter Leistung P kann die Arbeit auch durch

$$W = P \cdot t \tag{27}$$

berechnet werden, worin t die Zeit bedeutet.
Hängt die Leistung P von der Zeit ab, so ist Formel (27) durch

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt \tag{28}$$

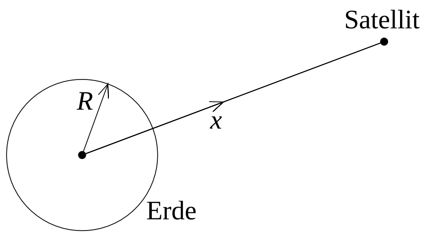
zu ersetzen.



Beispiel 1: Dehnung einer Feder

$$F(x) = -c \cdot x$$

$$W = -\int_0^s c \cdot x\, dx = \left[-\frac{c}{2} \cdot x^2\right]_0^s = -\frac{c}{2} \cdot s^2$$



Beispiel 2: Anheben eines Satelliten der Masse m von der Erde bis zur Höhe H:
Erdradius R (Kugel)

$$F(x) = -\frac{m \cdot g \cdot R^2}{x^2}$$

$$W = -\int_R^H \frac{m \cdot g \cdot R^2}{x^2}\, dx = -\left[m \cdot g \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_R^H = m \cdot g \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{R}\right)$$

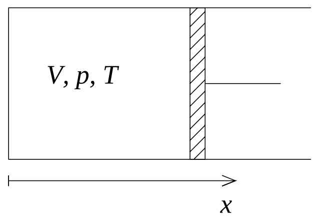
Für sehr große Höhe H gilt ungefähr: $W = -m \cdot g \cdot R$.

Bei welcher Geschwindigkeit des Satelliten ist seine kinetische Energie gleich dieser Arbeit?

$$m \cdot g \cdot R = \frac{m}{2} \cdot v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$$

$$v \approx \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6378 \cdot 10^3} = 11186 \ \tfrac{m}{s} \qquad \text{(Fluchtgeschwindigkeit)}$$

Beispiel 3: Kolbenmaschine
Kraft auf den Kolben: $F = p \cdot A$



$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p \cdot A\,dx = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

Der Druck p hängt vom Volumen V und der Temperatur T ab.

a) Isotherme Expansion: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad \Rightarrow \qquad p = \dfrac{n \cdot R \cdot T}{V}$

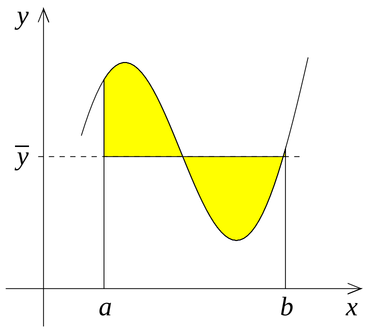
$$\Rightarrow \qquad W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V}\,dV = \Big[n \cdot R \cdot T \cdot \ln(V)\Big]_{V_1}^{V_2} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

b) Adiabatische Expansion: $p \cdot V^\kappa = p_1 \cdot {V_1}^\kappa \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{p_1 \cdot {V_1}^\kappa}{V^\kappa}$ mit $\kappa = \dfrac{c_p}{c_v}$

$$\Rightarrow \qquad W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot {V_1}^\kappa}{V^\kappa}\,dV = \left[p_1 \cdot {V_1}^\kappa \frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{1-\kappa} \cdot \left({V_2}^{1-\kappa} - {V_1}^{1-\kappa}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad W = \frac{p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right)$$

11.6 Mittelwert



Zu endlich vielen Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ wird ein Mittelwert definiert:

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (29)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad n \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Analog definiert man zu den unendlich vielen Werten einer Funktion $y = f(x)$ einen mittleren Wert $\overline{y}$ in einem Intervall $[a,\, b]$ durch die Forderung:

$$(b - a) \cdot \overline{y} = A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (30)$$

daraus folgt:

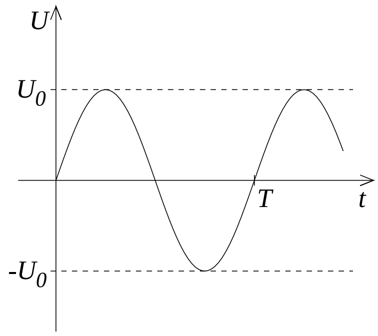
$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad (31)$$

Bei manchen Problemen bildet man auch den Mittelwert von $(f(x))^2$, den man dann quadratischen Mittelwert nennt:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{32}$$

Beispiel: Effektive Spannung

Bei der Mittelwertbildung der Wechselspannung (unabhängige Variable t) wird als Intervall eine volle Periode genommen.
Der zeitliche Verlauf der Wechselspannung ist:



$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

mit

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Damit wird der Mittelwert:

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt = \frac{U_0}{T} \cdot \left[\frac{-\cos(\omega \cdot t)}{\omega}\right]_0^T = 0$$

Der quadratische Mittelwert hingegen ergibt:

$$\overline{U^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T {U_0}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)\, dt = \frac{{U_0}^2}{T} \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)\right]_0^T = \frac{{U_0}^2}{2}$$

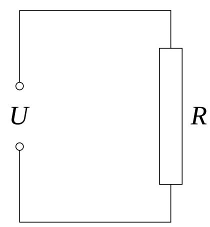
Die Quadratwurzel aus dem mittleren Spannungsquadrat heißt Effektivspannung U_{eff}:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Entsprechend wird eine effektive Stromstärke definiert. Zum Verständnis dieser Effektivwerte werde der nebenstehende Stromkreis betrachtet:
Beim Anlegen einer Gleichspannung U nimmt der Widerstand R die Leistung P auf:

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung hängt die aufgenommene Leistung von der Zeit t ab:



$$P(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}{R} = \frac{{U_0}^2}{R} \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

Die mittlere aufgenommene Leistung P ist daher:

$$P = \frac{{U_0}^2}{2 \cdot R} = \frac{{U_{\text{eff}}}^2}{R}$$

A Übungsaufgaben

A.1 Aufgaben zur Mengenlehre

1. In welchen der folgenden Beispiele wird der Mengenbegriff im mathematischen Sinn gebraucht?
   (a) die Menge der Freitage im laufenden Jahr
   (b) die Menge der Primzahlen
   (c) die Menge Wasser in einem Litergefäß
   (d) die Menge der Punkte auf der Peripherie eines Kreises
   (e) die Menge der Monatsnamen, die mit K beginnen

2. Welcher der genannten Mengen gehört ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1 : 2 an?

(a) Menge $\mathcal{V}$ der Vierecke	Anmerkung: Ein Viereck heißt:
(b) Menge $\mathcal{T}$ der Trapeze	**Trapez**, wenn es zwei parallele Seiten hat
(c) Menge $\mathcal{S}$ der Rhomben	**Rhombus**, wenn alle Seiten gleich lang sind
(d) Menge $\mathcal{R}$ der Rechtecke	**Rechteck**, wenn alle Winkel 90° sind
(e) Menge $\mathcal{P}$ der Parallelogramme	**Parallelogramm**, wenn gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen
(f) Menge $\mathcal{D}$ der Drachen	**Drachen**, wenn zwei Paare benachbarter gleichlanger Seiten vorhanden sind
(g) Menge $\mathcal{Q}$ der Quadrate	**Quadrat**, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind

3. Es sind die Lösungsmengen folgender Aussageformen anzugeben:
   (a) x ist eine durch 23 teilbare zweistellige Zahl
   (b) Das Quadrat der Zahl x ist um 8 kleiner als ihr sechsfacher Wert
   (c) x ist eine zweistellige, gerade Primzahl

4. Es sind alle Teilmengen der Menge $\{i, l, s, e\}$ zu bestimmen.

5. Welche echten Enthaltenseinaussagen gelten zwischen den in Aufgabe 2 aufgeführten Mengen? Zeichnen Sie ein Venn–Diagramm.

6. Es sind die Durchschnitte jeder der in Aufgabe 2 genannten Mengen mit jeder anderen dieser Mengen zu bilden.

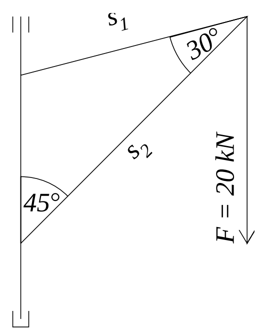
7. Es sind Vereinigung, Durchschnitt und Differenz aus folgenden Mengenpaaren zu bilden:
   (a) $\{a, u, t, o\}$ und $\{m, a, u, s\}$
   (b) $\{0, 2, 4, \dots\}$ und $\{0, 5, 10, \dots\}$
   (c) der Menge aller russisch sprechenden Menschen und der Menge aller englisch sprechenden Menschen

8. Es ist das Mengenprodukt der beiden Mengen $\mathcal{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ und $\mathcal{B} = \{\mathrm{u},\ \mathrm{v},\ \mathrm{w}\}$ zu bilden.

9. Wie heißt die kleinste Menge, die die Mengen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ enthält?

10. Es ist (a) $\mathcal{A}\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$ (b) $\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ zu bestimmen. (Skizze für Punktmengen)

A.2 Aufgaben zu Vektoren



11. Wie groß sind die in den Stäben s_1 und s_2 (Schließe und Strebe eines Drehkrans, s. Abb.) auftretenden Kräfte, wenn der Kran eine Last von 20 kN trägt.

12. Welchen Winkel müssen zwei am selben Punkt angreifende Kräfte von gleicher Größe miteinander bilden, damit ihre Resultierende wiederum die gleiche Größe hat?

13. Wie heißt der zu $\vec{a} = \frac{11}{15}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{15}\vec{k}$ gehörige Einheitsvektor?

14. Von dem Vektor $\vec{r} = -3\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$ sollen Länge, Einheitsvektor und die Winkel, die er mit den Grundvektoren bildet, bestimmt werden.

15. Welche Winkel bildet der Vektor $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mit
$\vec{a} = \vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$ $\quad \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad \vec{c} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$
mit den Koordinatenachsen?

16. Ein Oktaeder (regelmäßiger Körper, begrenzt von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken) habe die Kantenlänge $\sqrt{2}$, alle seine Eckpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Die Kanten sollen als Vektoren betrachtet werden, wobei die in der x–y–Ebene liegenden Kanten eine Orientierung im positiven Umlaufsinn erhalten sollen, während die anderen Kanten in Richtung nach den auf der z–Achse liegenden Eckpunkten orientiert werden sollen. Wie heißen die Kantenvektoren?

17. Ein Tetraeder (regelmäßiger Körper, begrenzt von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken) von der Kantenlänge 2 liegt mit einer Seitenfläche in der x–y–Ebene derart, dass ein Eckpunkt im Ursprung und eine Kante auf der positiv gerichteten x–Achse liegt. Wie heißen die Vektoren für die Kanten? (Orientierung wie in Aufgabe 16)

18. In eine Kugel sind vier radiale Löcher so zu bohren, dass die freien Enden von vier in sie gesteckten gleichlangen Stäben die Spitzen eines Tetraeders bilden. Welchen Winkel schließen die Stäbe ein?

19. Von einem (unregelmäßigen) Tetraeder seien die vier Eckpunkte gegeben:

    A(0, 0, 0); B(4, -1, 1); C(3, 4, 1); D(2, 2, 5)

    Berechnen Sie:

    (a) die Kantenlänge $\overline{\mathrm{AD}}$

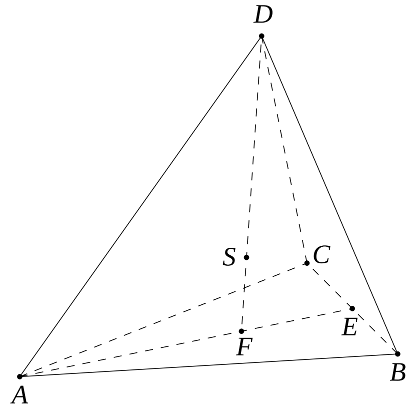
    (b) die Fläche des Dreiecks $\triangle$ABC

    (c) das Volumen des Tetraeders

    (d) die Lage der Schwerpunkte des Dreiecks $\triangle$ABC (F) und des Tetraeders(S)

    Es gilt: $\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + 0.25\overrightarrow{\mathrm{FD}}$

    $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 2/3\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}$; E halbiert $\overline{\mathrm{BC}}$



20. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g_1 und g_2:

    g_1: A(1, 4, 2) und B(2, 4, 3) g_2: C(-1, 2, 4) und D(1, 4, 4)

A.3 Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen

21. $\dfrac{1}{x+y+1} = \dfrac{1}{4x-3y+1} \quad \wedge \quad \dfrac{1}{3x+y+2} = \dfrac{2}{4+3\cdot(x+2y)}$

22. Zwei Bautrupps A und B sollten eine Anlage zusammen in 30 Tagen montieren. Da aber Trupp A bereits nach 12 Tagen abgezogen wird, benötigt B noch 27 Tage zur Fertigstellung der Arbeit. In welcher Zeit hätte jeder Trupp allein die Montage durchführen können?

23. Zwei LKW eines städtischen Kraftverkehrsbetriebes sollten die Steine zur Ausbesserung einer Straße in 12 Tagen gemeinsam anfahren. Nach 8 Tagen wurde der eine Wagen anderweitig eingesetzt, und der andere Wagen fuhr noch 7 Tage allein. In wieviel Tagen hätte jeder LKW die Steine allein angefahren?

24. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem: $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z-u-v = & 6 \\ x+y+z-u+v = & 4 \\ x-y+z+u+v = & 8 \\ x-y-z+u+v = & 2 \\ -x+y-z+u-v = & 10 \end{array}\right.$

25. Ein Schnellzug benötigt auf einer bestimmten Strecke 2.5 Stunden weniger Fahrzeit als ein Personenzug, da er stündlich 25 km mehr als dieser zurücklegt. Ein Güterzug, dessen Geschwindigkeit um 15 km/h geringer ist als die des Personenzuges, benötigt für die Strecke 3.5 Stunden mehr als der Personenzug. Wie lang ist die Strecke, und mit welchen Geschwindigkeiten fahren die Züge?

26. (a) $x+2-\sqrt{2\cdot x^2-2\cdot x+12}=0;$ (b) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=0;$
    (c) $|\,x-1\,|\cdot|\,x+2\,|>0;$ (d) $|\,x-2\,|\cdot|\,x-4\,|>3;$
    (e) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x-1}<1$

27. Um einen Behälter zu füllen, braucht die eine von zwei Pumpen 24 *min* mehr als die zweite. Beide gleichzeitig pumpen den Behälter in 35 *min* voll. In welcher Zeit füllt die erste den Behälter allein?

28. Auf dem Umfang eines Kreises von 420 *m* Länge bewegen sich zwei Körper A und B. B legt in der Minute 25 *m* mehr zurück als A und braucht daher, um den ganzen Kreis zu durchlaufen, 5 *min* weniger als A. Welche Geschwindigkeiten haben A und B?

29. Zwei Widerstände, die sich um 200 Ω unterscheiden, haben in Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 24 Ω. Wie groß sind die Widerstände?

30. Bei einer Brinellhärteprüfung eines Stahls verwendet man eine Stahlkugel von 10 *mm* Durchmesser und erhält nach der Prüfung, bei der die Stahlkugel auf die Oberfläche des zu prüfenden Werkstücks gedrückt wird, einen Kugeleindruck, dessen Druchmesser (auf der ebenen Oberfläche gemessen) 5 *mm* ist. Wie tief ist die Kugel in das Werkstück eingedrungen?

31. (a) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2x-3}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{3x+5}$ (b) $18^{-x}\cdot 2436^{x}=45^{x+1}$
    (c) $100^{1/x}=36.63^{0.04}$ (d) $24-18\cdot e^{-2x}+3\cdot e^{-4x}=0$

32. (a) $\lg(2\cdot x+3)=\lg(x-1)+1$ (b) $\lg(x^5)=\lg(x^2)+6$

A.4 Aufgaben zur Trigonometrie

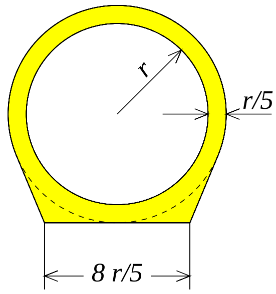
33. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen:

    (a) $f(x)=\sin(x+0.5)+\cos(0.5x+1)$ $x\in[0,\,2\pi]$
    (b) $f(x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$ $x\in[0,\,2\pi]$
    (c) $f(x)=\arcsin(x)$ $x\in[-1,\,1]$
    (d) $f(x)=\arccos(x)$ $x\in[-1,\,1]$
    (e) $f(x)=\arctan(x)$ $x\in[-5,\,5]$

34. In einem Kreis vom Halbmesser $r=50$ *cm* seien auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes zwei parallele Sehnen gezogen, von denen die eine $a=14$ *cm* und die andere $b=30$ *cm* Abstand vom Kreismittelpunkt hat. Man berechne Inhalt und Umfang der von den beiden Sehnen und dem Kreis eingeschlossenen Fläche.

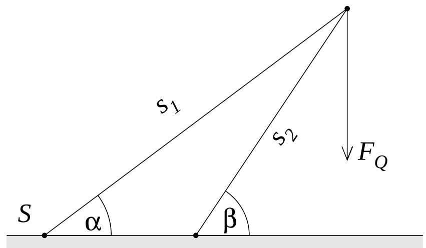
35. Ein zylindrischer Dampfkessel hat den Durchmesser $d=1.00$ *m* und die Länge $L=6.00$ *m* und ist bis zu einer Höhe $h=0.8\ d$ mit Wasser gefüllt. Wie groß ist die vom Wasser benetzte Fläche A des Dampfkessels?

36. Man entwickle für den in nebenstehendem Bild dargestellten Querschnitt eines Zementrohres eine Flächenformel.



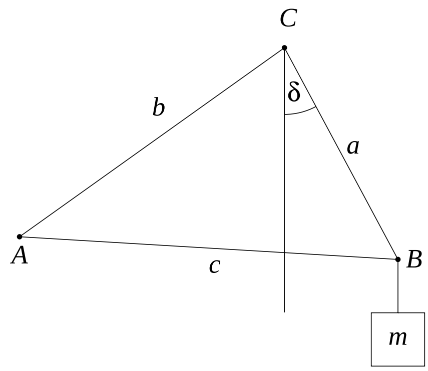
37. Die Kreise mit den Radien $r_1 = 8\ cm$, $r_2 = 6\ cm$ und $r_3 = 5\ cm$ berühren sich gegenseitig von außen. Unter welchen Winkeln schneiden sich jeweils zwei Verbindungsgeraden zweier Mittelpunkte, und welchen Inhalt hat die zwischen den Kreisen liegende dreieckähnliche Fläche?

38. Ein Scherenkran ist mit $F_Q = 28\ kN$ belastet. Die Streben s_1 und s_2 greifen unter den Winkeln $\alpha = 36°$ und $\beta = 55°$ an. Es sind die Stabkräfte F_1 und F_2 sowie die am Spannschloss S auftretende Zugkraft F_Z und Normalkraft F_N zu bestimmen.



39. Ein schiefwinkliges Dreieck sei durch $a = 82.14\ m$, $h_a = 33.62\ m$ und $\alpha = 42.28°$ gegeben. Gesucht sind b, c, β, γ.

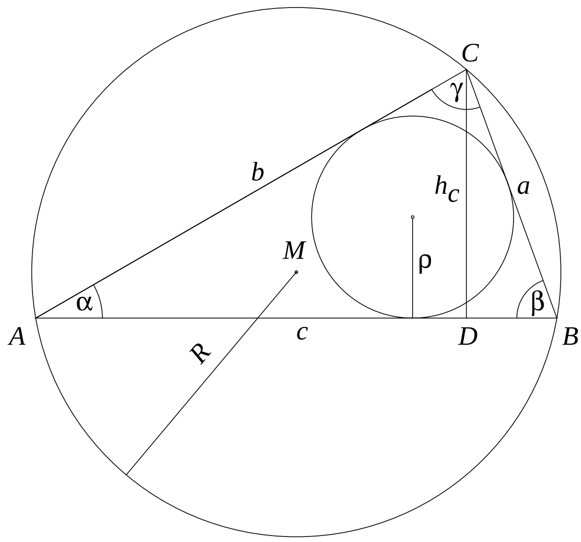
40. Ein Dreieck aus Al–Blech (Dichte $\varrho = 2700\ kg/m^3$) der Dicke $d = 0.5\ mm$ und den Seiten $a = 8\ cm$, $b = 10\ cm$ und $c = 12\ cm$ ist an der Spitze C drehbar aufgehängt. Bei B ist ein Gewicht der Masse m befestigt.
Berechnen Sie den Gleichgewichtswinkel δ für
(a) $m = 0$
(b) $m =$ Masse des Dreiecks



A.5 Aufgaben zur analytischen Geometrie

41. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind:
$A(-2,-1)$, $B(6,1)$ und $C(1,5)$.

Zu bestimmen sind:
(a) die Länge der Dreiecksseiten a, b, c
(b) die Gleichung der Seite AB
(c) die Dreieckswinkel α, β, γ
(d) die Gleichung der Höhe h_c
(e) der Fußpunkt D der Höhe h_c
(f) der Höhenschnittpunkt
(g) der Mittelpunkt M des Umkreises
(h) der Radius R des Umkreises
(i) der Schwerpunkt des Dreiecks
(j) der Flächeninhalt des Dreiecks



42. Die Seiten eines Dreiecks sind durch die Geraden gegeben:

$12 \cdot x + 5 \cdot y - 32 = 0$	Gesucht sind:	(a) die Eckpunkte des Dreiecks
$4 \cdot x - 3 \cdot y + 8 = 0$		(b) die Längen der Dreiecksseiten
$y + 8 = 0$		(c) die Innenwinkel des Dreiecks
		(d) der Höhenschnittpunkt

43. Wie heißt die Gleichung des Kreises durch die drei Punkte $P_1(8, 16)$, $P_2(15, 9)$ und $P_3(8, -8)$?

44. Gegeben sind der Kreis mit der Gleichung $2x^2 + 2y^2 - 32x - 16y - 178 = 0$ und die beiden Punkte $A(-9, -3)$ und $B(27, -18)$. Man bestimme den Abstand des Kreismittelpunktes von der durch A und B gehenden Geraden.

45. Um den Nullpunkt ist ein Kreis gezeichnet, der durch $A(1.25, -3)$ geht, und in A ist die Tangente gezogen. Welchen Abstand d hat der Punkt $B(6, 4)$ von der Tangente?

46. Vom Punkt $A(14, 2)$ sind an den Kreis $K = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 100\}$ die Tangenten gezogen. Man berechne die Berührungspunkte B und C, den Tangentenschnittwinkel δ und die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$.

47. In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich die Kreise:

$K_1: \quad x^2 + y^2 + 14 \cdot x + 8 \cdot y + 56 = 0$
$K_2: \quad x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 8 \cdot y - 8 = 0$

48. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der die Kreise

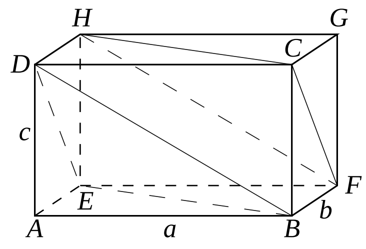
$\mathcal{K}_1 = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 + 30 \cdot x + 16 \cdot y + 33 = 0\}$
$\mathcal{K}_2 = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 - 20 \cdot x - 16 \cdot y + 115 = 0\}$

berührt und den Radius $r = 10$ hat?

49. Von einem Quader ABCDEFGH (Kantenlängen a, b und c) werden die beiden Dreieckspyramiden ABED und CFGH abgeschnitten.

   (a) Zeigen Sie, dass die entstehenden Schnittflächen parallel sind und berechnen Sie den Abstand dieser Ebenen.

   (b) Wie groß sind Höhe und Volumen der abgeschnittenen Dreieckspyramiden?



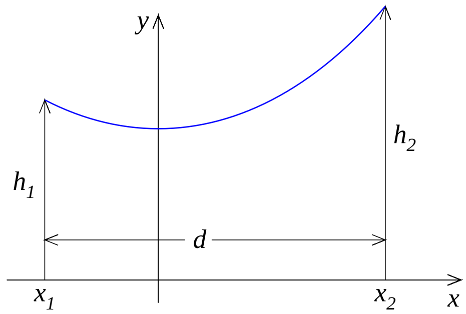
50. Die Kugel K(M, r) mit M(3, 4, 12) und $r = 13$ schneidet die x–y–Ebene in einem Kreis. Wie heißt die Gleichung des Kreises?

51. Ein Seil hängt zwischen zwei verschieden hohen Masten, die einen Abstand von $d = 100\ m$ haben. Die Seilkurve habe die Gleichung:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

Berechnen Sie: b, x_1, x_2 und den tiefsten Punkt des Seils

Daten: $a = 500\ m$, $\quad h_1 = 20\ m$, $\quad h_2 = 25\ m$



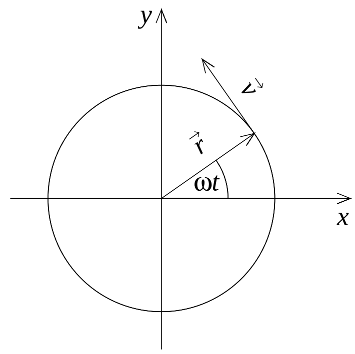
52. Ein Körper bewege sich auf einem Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ gilt dann

$$\vec{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

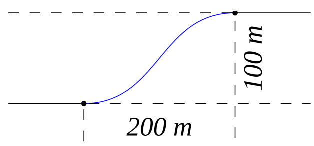
Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ steht senkrecht auf $\vec{r}(t)$.

(b) Der Betrag der Zentripetalbeschleunigung ist $a = r \cdot \omega^2$.



53. Die Verbindung von zwei parallelen Straßen soll knickfrei erfolgen. Suchen Sie mögliche Verbindungskurven und wählen Sie eine aus.



54. Ein Gegenstand wird horizontal mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5\ m/s$ abgeworfen und schlägt $20\ m$ tiefer auf.

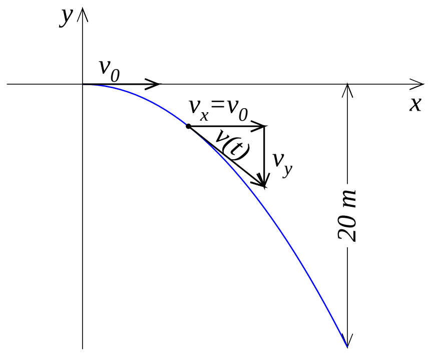
Berechnen Sie:

(a) den Aufschlagpunkt P_A

(b) den Aufschlagwinkel

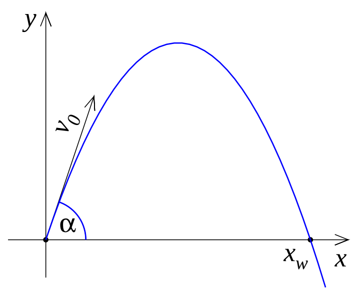
(c) die Aufschlaggeschwindigkeit

Rechnen Sie mit $g = 10\ m/s^2$.



55. Ein Gegenstand wird unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit $v_0 = 10\ m/s$ abgeworfen. Bei horizontalem Gelände schlägt er in der Entfernung x_w auf.

Wie ist der Abwurfwinkel zu wählen, damit x_w möglichst groß wird und wie groß ist dann x_w?



Anleitung zu Nr. 54 und 55:

Die Bewegungen in x– und y–Richtung werden als voneinander unabhängig betrachtet und anschließend überlagert (Superpositionsprinzip). Die Geschwindigkeit in x–Richtung bleibt konstant, die Geschwindigkeit in y–Richtung wächst proportional zur Zeit. $v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha)$, $\quad x(t) = v_x \cdot t$

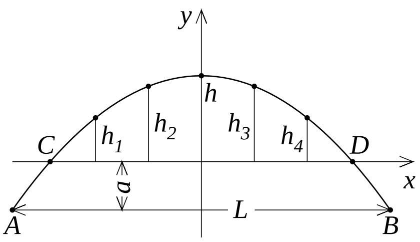
$v_y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$, $\quad y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0.5 \cdot g \cdot t^2$

56. Der parabolische Träger einer Brücke mit aufgehängter Fahrbahn CD hat die Spannweite L und die zugehörige Pfeilhöhe $h + a$.

    (a) Für das Verhältnis $(h + a) : L = 1 : 6$ ist die Gleichung der Parabel im angegebenen System aufzustellen.

    (b) Es sei in (a) speziell $a = h$. Wie groß ist die Länge der Fahrbahn?

    (c) Für $L = 36\ m$, $\quad h = 6\ m$ und $a = 3\ m$ berechne man die Länge der Fahrbahn $\overline{CD}$ sowie die Längen der Vertikalstäbe, die in 5 m bzw. 10 m Entfernung von der Brückenmitte angebracht sind.



57. Durch den variablen Punkt $Q(y_Q \neq 0)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 36$ wird eine Parallele zur x–Achse gezogen, die die y–Achse in R trifft, $\overline{RQ}$ über Q hinaus um die Strecke $\overline{RQ}$ verlängert ergibt T. A ist der Schnittpunkt zwischen dem Kreis und der x–Achse mit positiver Abszisse. Auf welcher Kurve bewegt sich der Schnittpunkt P von $\overline{OQ}$ und $\overline{AT}$.

58. Eine nach oben geöffnete Parabel enthält die drei Punkte $P_1(1, -1.5)$; $P_2(8, 3.75)$; $P_3(0, -0.25)$

    (a) Welche Parabeltangente und welche Parabelnormale gehen durch den Punkt $P_4(5.5, \ \ldots)$ der Parabel?

    (b) In welchem Punkt P_5 berührt die Tangente mit der Steigung -2.5 die Parabel?

59. Wie groß ist die minimale Fläche eines gleichseitigen Dreiecks, dessen drei Seiten auf Tangenten der Parabel $y^2 = 6x$ liegen?

60. Wie heißen die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an die Parabel $y^2 = 37.5x$ und den Kreis $x^2 + y^2 = 100$?
    Welches sind die Berührungspunkte?

61. Der parabolische Hohlspiegel eines Scheinwerfers hat den Durchmesser $d = 26.4\ cm$ und eine Tiefe $h = 12.0\ cm$. In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt ist eine als punktförmig anzunehmende Lichtquelle zu befestigen, damit die Lichtstrahlen parallel zur Spiegelachse reflektiert werden?

62. Die Parabel $y^2 = x$ und der Kreis mit $M(2, 0)$ und $r = 1$ schneiden sich nicht. An welcher Stelle haben die beiden Kurven den kleinsten Abstand und wie groß ist er?

63. In die Ellipse $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ ist ein Quadrat einzuzeichnen, dessen Eckpunkte auf der Ellipse liegen und dessen Seiten parallel zu den Ellipsenachsen sind. Wie groß ist seine Fläche? Lässt sich ein Rechteck einzeichnen, dessen Fläche noch größer ist?

64. Vom dem Planeten Merkur ist die numerische Exzentrizität der Bahn $\varepsilon = 0.2056$ sowie die Periheldistanz $d_1 = 46$ Mill. km gegeben. Man berechne die Apheldistanz d_2.

65. Zwei Stäbe $\overline{OR} = m$ und $\overline{RP} = n$ sind in R durch ein Gelenk verbunden. $\overline{OR}$ dreht sich um O linksläufig mit der Winkelgeschwindigkeit ω während RP sich rechtsläufig mit $2 \cdot \omega$ dreht. Welche Bahn beschreibt P? (Bewegung in der Ebene)

A.6 Aufgaben zur Differentialrechnung

66. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve mit der Gleichung
$y = 0.1 \cdot x^4 - 0.2 \cdot x^2 - 0.3$ die x–Achse?

67. Wo hat die Kurve mit der Gleichung $y = 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5$ waagerechte Tangenten?

68. Es ist die Funktion 3. Grades zu bestimmen, für die bekannt ist:
$f(0) = -2;\quad f(2) = 2;\quad f'(-1) = -16;\quad f'(0) = 0$

69. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten der Funktion $y = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ genügen, damit die Kurve nirgends eine waagerechte Tangente hat?

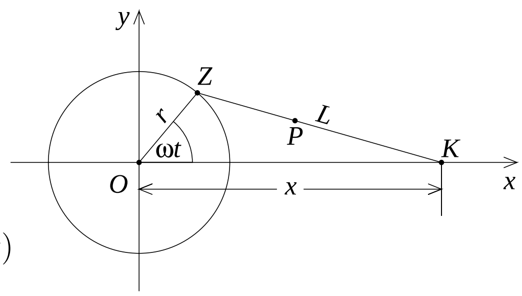
70. Wie lautet die ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Kurve bei $x = -1$ und $x = 1$ die Gerade mit der Gleichung $y = -0.5 \cdot x + 2.5$ unter einem rechten Winkel schneidet? Wo liegt der dritte Schnittpunkt?

71. Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 14\ m/s$. Er wird gebremst und bewegt sich nach dem Weg–Zeit–Gesetz

$$s = 14(m/s) \cdot t - 2.25(m/s^2) \cdot t^2 + 0.03(m/s^3) \cdot t^3$$

bis er zum Stehen kommt. Wie lang ist der Bremsweg?

72. Ist bei einem Schubkurbelgetriebe (s. Abb.) die Kurbellänge r im Vergleich zur Schubstangenlänge L sehr klein, so gilt für die Abszisse des Kreuzkopfes K näherungsweise



$$x \approx \frac{4 \cdot L^2 - r^2}{4 \cdot L} + r \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{r^2}{4 \cdot L} \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$$

(a) Diese Formel ist unter Verwendung von $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - 0.5 \cdot \varepsilon$ für $\varepsilon \ll 1$ und goniometrischer Beziehungen zu bestätigen.

(b) Wie groß ist bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω näherungsweise die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes?

(c) Wie groß ist die Beschleunigung des Kreuzkopfes?

(d) Der Punkt P teile die Schubstange im Verhältnis $m : n$. Wie groß ist die Horizontal– und Vertikalkomponente seiner Geschwindigkeit?

73. Für die Kurve mit der Gleichung $(x-6)^2+(y-8)^2 = 100$ ist der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = -2$ zu ermitteln.

74. Die folgenden Grenzwerte sind zu bestimmen:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0.5} \dfrac{4\cdot x^3 - 52\cdot x^2 + 49\cdot x - 12}{4\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 11\cdot x + 3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{e^{\sin(x)} - e^x}$

75. Diskutieren Sie die Kurve

    $y = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}\cdot(x-1)}$

76. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

    (a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\tan(x) - \dfrac{1}{\cos(x)}\right)$

77. Diskutieren Sie folgende Kurven:

    (a) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2+4}$ (b) $y = \dfrac{2\cdot x^2 - 12\cdot x + 16}{x^2 - 6\cdot x + 5}$

78. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

    $y = \dfrac{x}{(x-a)\cdot(x-b)}$ $\qquad a\cdot b > 0$

79. Welche Gleichung hat die Parabel fünfter Ordnung ($a_5 = 1$), die mit der x–Achse einen Berührungspunkt mit der Abszisse 0, einen Extrempunkt $E(2,\ -2)$ und einen Wendepunkt mit der Abszisse 1 hat?

80. Einem Kreis (Radius r) ist ein Rechteck einzubeschreiben:

    (a) mit größten Flächeninhalt A
    (b) mit größtem Umfang U
    (c) mit größtem Trägheitsmoment I $\quad (I = a\cdot b^3/12)$
    (d) mit größtem Widerstandsmoment W $\quad (W = a\cdot b^2/6)$

    Wie lang sind jeweils die Seiten des Rechtecks?

81. Der Querschnitt einer Schleuse bzw. eines Kanals soll den Wert A haben. Wegen des Materialaufwandes und des Reibungswiderstandes soll der benetzte Umfang möglichst klein werden. Wie lang sind jeweils die Abmessungen des Querschnitts, wenn er

    (a) ein oben offenes Rechteck
    (b) ein oben offenes symmetrisches Trapez mit dem konstanten Böschungswinkel $\alpha = 30°$ an der Grundlinie
    (c) ein oben offenes, auf der Spitze stehendes gleichschenkliges Dreieck
    (d) ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis

    ist? Zahlenbeispiel: $A = 1\ m^2$.

82. In eine Kugel (Radius R) ist einzubeschreiben:
    (a) der Kreiszylinder mit größtem Volumen V
    (b) der Kreiszylinder mit größter Mantelfläche M
    (c) der Kreiszylinder mit größter Oberfläche O
    (d) der Kegel mit größtem Volumen V

    Wie lang sind jeweils Radius und Höhe?

83. Für die Amplitude S_0 einer gedämpften erzwungenen Schwingung gilt als Funktion der Frequenz ω

$$S_0 = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \omega \cdot \delta)^2}} \qquad a,\ \omega_0,\ \delta \ \text{ sind konstant}$$

    Bei welcher Kreisfrequenz $\omega = \omega_r$ ist S_0 am größten? (Resonanz)

84. Ein Balken auf zwei Stützen mit der Stützweite L hat bei den folgenden Belastungen im Abstand x vom linken Auflager das Biegemoment:

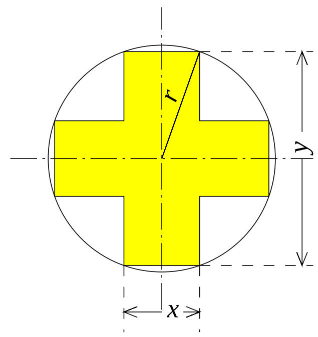
    (a) $M_x = \frac{q \cdot x}{2}(L - x)$ $\qquad x \in [0,\ L]$ bei gleichmäßig verteilter Last q

    (b) $M_x = \frac{q \cdot x}{6 \cdot L}\left(L^2 - x^2\right)$ $\qquad x \in [0,\ L]$ bei einseitiger Dreieckslast, die von 0 bis q linear ansteigt.

    (c) $M_x = \frac{2 \cdot F \cdot x}{L}(L - x - \frac{a}{2})$ $\qquad x \in [0,\ L-a]$ bei zwei gleichgroßen wandernden Lasten mit konstantem Abstand $a < L/2$, wobei x der Abstand der linken Last vom linken Auflager ist.

    An welcher Stelle ist das Biegemoment am größten?

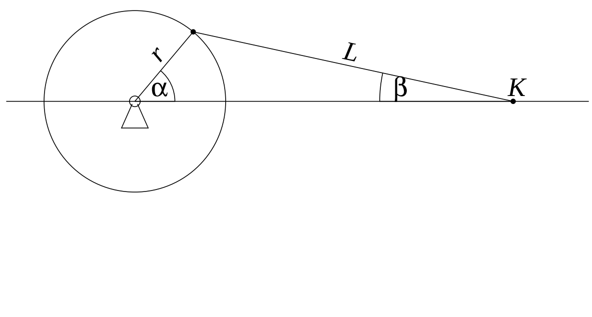
85. Das Innere einer Spule habe kreisförmigen Querschnitt und soll durch einen Eisenkern von kreuzförmigem Querschnitt maximal ausgefüllt werden. Zu bestimmen sind die Abmessungen des kreuzförmigen Querschnitts. Wieviel Prozent der Kreisfläche werden ausgefüllt?



86. Beim Schubkurbelgetriebe gilt

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r}{L} \cdot \sin(\alpha)\right)$$

    wenn α der Kurbelwinkel ist. Für welchen Wert von α wird β maximal und wie groß ist dann β?



    Zahlenbeispiel: $\quad r = 5\ cm, \quad L = 25\ cm.$

87. Beim „freien“ Fall mit Luftwiderstand gilt für den zurückgelegten Weg

$$s = \frac{a^2}{g} \cdot \ln\left(\cosh\left(\frac{g \cdot t}{a}\right)\right) \qquad \text{mit} \qquad a = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}, \qquad F_L = c \cdot v^2$$

Dabei wird angenommen, dass der Luftwiderstand F_L proportional dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v ist.

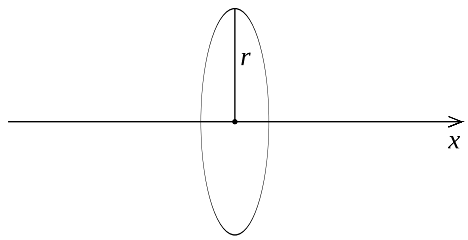
(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$

(b) Aus beiden Formeln sind $s(t)$ und $v(t)$ für den freien Fall im luftleeren Raum zu berechnen ($c = 0$)

88. Ein elektrischer Strom, der in einer runden Spule vom Radius r fließt, übt auf einen Magneten, der vom Zentrum der Spule einen Abstand x hat, eine Kraft F von

$$F = \frac{k \cdot x}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$$

aus. Für welchen Abstand x wird die Kraft maximal?



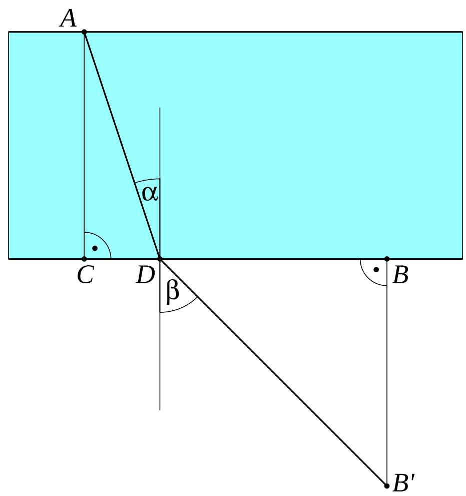
89. Ein Mann in einem Ruderboot möchte von A nach B. Er kann mit $v = 2\ km/h$ rudern und zu Fuß mit $v = 4\ km/h$ laufen. An welchem Punkt D muss er anlegen, um sein Ziel möglichst schnell zu erreichen?

Daten: $\overline{AC} = 5\ km$, $\overline{BC} = 6\ km$.

90. Der Punkt B von Aufgabe 74 liege jetzt 5 km im Innern des Landes (Punkt B').
Welchen Kurs muss er jetzt rudern?

Zeigen Sie dass gilt: $$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}$$

(Brechungsgesetz)



A.7 Aufgaben zu Funktionen mit mehreren Veränderlichen und Fehlerrechnung

91. Skizzieren Sie den Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z = 0$ beschrieben wird.

92. Welche Änderung $\Delta\alpha$ hat man annähernd für den Winkel α eines rechtwinkligen Dreiecks zu erwarten, wenn die Ankathete $b = 28$ m um 5 cm vergrößert und die Hypothenuse $c = 35\ m$ um 10 cm verkleinert werden?

93. Man bestimme die Ableitung der Funktion $y(x)$: $(y+2) \cdot \sin(x) - \sin(y) = 0$ an der Stelle (0, 0).

94. Unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven mit den Gleichungen
$x^2 + 4 \cdot y^2 - 100 = 0$ und $x^2 - y^2 - 20 = 0$?

95. Welcher Punkt P_1 der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ hat von dem Punkt $P_0(0, 1)$ die kleinste Entfernung?

96. Gegeben ist ein Kreissektor mit dem Inhalt A. Wie groß muss der Radius sein, damit der Sektorenumfang ein Minimum wird?

97. Eine Kugel mit dem Radius R schneidet sich mit einem Zylinder mit dem Radius $R/2$. Die Achse des Zylinders gehe durch den Mittelpunkt der Kugel. Man berechne das beiden Körpern gemeinsame Volumen.

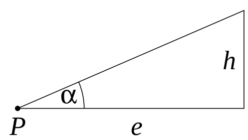
98. Zur Bestimmung der Brennweite einer einfachen, bikonvexen Linse werden die Gegenstandsweite $a = 42.4\ cm$ und die Bildweite $b = 26.6\ cm$ mit den Messfehlern $\Delta a = \Delta b = 0.1\ cm$ ermittelt. Wie groß ist die Brennweite f und ihr absoluter Maximalfehler?
Anmerkung: Es gilt: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

99. Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls eines Stahldrahtes wurden dessen Länge $L = (2473 \pm 3)\ mm$ und der Durchmesser $d = (0.292 \pm 0.001)\ mm$ gemessen. Durch eine am Draht angreifende Kraft $F = (10 \pm 0.05)\ N$ ergab sich eine Längenänderung $e = (1.750 \pm 0.005)\ mm$. Den Elastizitätsmodul erhält man aus

$$E = \frac{F \cdot L}{(d/2)^2 \cdot \pi \cdot e}$$

Man bestimme E sowie seinen absoluten und relativen Maximalfehler.

100. Um die Höhe eines Turmes zu bestimmen, wurden in P der Winkel $\alpha = 19°15'$ und die waagerechte Entfernung $e = 254.30\ m$ gemessen. Mit welcher Genauigkeit müsste diese Messung durchgeführt werden, um h mit dem mittleren Fehler $\Delta h = 1\ dm$ zu erhalten? (beide Fehleranteile gleich groß)



A.8 Aufgaben zur Integralrechnung

101. Von den Kurven mit den Gleichungen

$$y = e^{x/4}, \quad y = -\frac{1}{8} \cdot x + 1 \quad \text{und} \quad x = 4$$

wird eine Fläche eingeschlossen.

Man berechne:

(a) den Inhalt dieser Fläche

(b) das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x–Achse entsteht.

102. Bei Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \cos(x)$ um die x–Achse entsteht ein Körper. Er erstrecke sich im Intervall $0 \leq x \leq a$.
Welchen Wert muss a haben, damit das Volumen den Wert $\pi/8$ annimmt? Man ziehe zur Berechnung die numerische Lösung von Gleichungen mit heran.

103. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - 8$ in den Grenzen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

104. Man bestimme den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der im Intervall $[0, 1]$ durch Rotation der Fläche unter der Hyperbel mit der Gleichung $y = \sqrt{1 + x^2}$ um die x–Achse erzeugt wird.

105. Berechnen Sie das folgende Integral durch Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x^2}{a^4 - x^4} \, dx$$

106. Man bestimme den Schwerpunkt des Flächenstücks, das durch die Parabeln $x = y^2$ und $x^2 = -8 \cdot y$ begrenzt wird.

107. Bestimmen Sie für die Fläche A, die durch $y = -x^2 - 3 \cdot x + 6$ und $x + y - 3 = 0$ begrenzt wird,

(a) den Schwerpunkt

(b) das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn A um die Begrenzungsgerade dreht.

108. Ein Körper werde erzeugt, indem man das Flächenstück im ersten Quadranten, das durch die Parabel $y^2 = 8 \cdot x$ und die Gerade $x = 2$ begrenzt ist, um die x–Achse dreht. Bestimmen Sie sein Massenträgheitsmoment bezüglich seiner Achse. (Dichte $\varrho = 1$)

109. Ein Kabel, das 40 N/m wiegt, wickelt sich von einer zylindrischen Trommel ab. Berechnen Sie die Arbeit W, die durch die Schwerkraft geleistet wird, wenn bereits 15 m abgewickelt sind und sich noch zusätzlich 75 m abwickeln.

110. Für die Bewegung eines Punktes gelten die Gleichungen

$$x(t) = 0.5 \cdot t^2; \qquad y(t) = \frac{1}{9} \cdot (6 \cdot t + 9)^{1.5}$$

Welchen Weg legt er in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 4$ zurück?

E Ergebnisse zu den Aufgaben

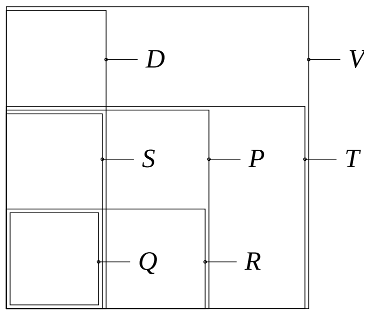
Die zitierten Referenzen sind:

A: Analysis für Ingenieure (s. Lit.–Verz. Nr. 5)
B: Algebra für Ingenieure (s. Lit.–Verz. Nr. 5)
C: F. Ayres: Differential- und Integralrechnung, McGraw Hill, 1975

Nr.	Ref.	Ergebnisse
1	B37/20	ja, außer (c)
2	B37/21	(a), (b), (d), (e)
3	B37/22	(a) {23,46,69,92}; (b) {2, 4}; (c){ }
4	B37/24	{ }, {i}, {l}, {s}, {e}, {i, l}, {i, s}, {i, e}, {l, s}, {l, e}, {s, e}, {i, l, s}, {i, l, e}, {i, s, e}, {l, s, e}, {i, l, s, e}
5	B37/25	(Tabelle unten)

5 B37/25

$X \subset Y$	V	T	S	R	P	D	Q
V							
T	$\times$						
S	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	
R	$\times$	$\times$			$\times$		
P	$\times$	$\times$					
D	$\times$						
Q	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	



6 B38/28

$X \cap Y$	V	T	S	R	P	D	Q
V	V	T	S	R	P	D	Q
T	T	T	S	R	P	S	Q
S	S	S	S	Q	S	S	Q
R	R	R	Q	R	R	Q	Q
P	P	P	S	R	P	S	Q
D	D	S	S	Q	S	D	Q
Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

7 B38/29

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{a,\ u,\ t,\ o,\ m,\ s\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{a,\ u\}$,
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{t,\ o\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{m,\ s\}$

(b) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0,\ 10,\ 20,\ \ldots\}$,
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ \ldots\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{5,\ 15,\ 25,\ \ldots\}$

(c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x \mid x$ spricht russisch oder englisch (oder beides)$\}$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \mid x$ spricht russisch und englisch$\}$
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x \mid x$ spricht russisch aber nicht englisch$\}$
$\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{x \mid x$ spricht englisch aber nicht russisch$\}$

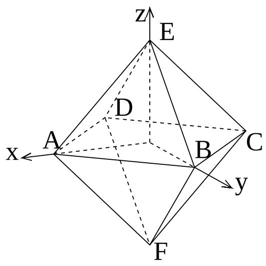
8	B38/30	$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(1,u),(1,v),(1,w),(2,u),\ldots,(4,w)\}$
9	B38/32	$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$
10	B38/35	(a) $\mathcal{A}$ (b) $\mathcal{A}$
11	B474/1002	$F_1 = 28.2843\ kN$, $F_2 = 38.6370\ kN$
12	B474/1003	120°

13 B482/1008 $\vec{a}$

14 B482/1009 $r = \sqrt{98},\ \hat{\vec{r}} = -0.3030\vec{i} + 0.8081\vec{j} + 0.5051\vec{k}$
$\alpha = 107.6406°,\ \beta = 36.0871°, \gamma = 59.6636°$

15 B482/1011 $\alpha = 96.3794°, \beta = 27.2660°, \gamma = 63.6122°$

16 B482/1012



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

17 B483/1014

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2b \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

mit $a = \sqrt{3}, \quad b = 1/a, \quad c = \sqrt{8/3}$

18 $109.4712°$

19 (a) $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{33}\,LE$, (b) $A = 0.5 \cdot \sqrt{387}\,FE$,
(c) $V = 83/6\,VE$ (d) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

20 $d = 2/\sqrt{3} = 1.1547\,LE$

21 B151/276 $\mathcal{L} = \{(x,\ y) \mid y = 0.75 \cdot x,\ \ x \in \mathcal{R} \setminus \{-4/7,\ -8/15\}\}$

22 B151/279 A benötigt 90 Tage, B benötigt 45 Tage

23 B151/282 A benötigt 28 Tage, B benötigt 21 Tage

24 B187/333 $\mathcal{L} = \{(4,\ 7,\ 3,\ 9,\ -1)\}$

25 B187/343 $T_P = 7\ h, \quad s = 315\ km, \quad v_S = 70\ km/h,$
$v_P = 45\ km/h, \quad v_G = 30\ km/h$

26 B199/429 (a) $\mathcal{L} = \{4,\ 2\}$

B200/435 (b) $\mathcal{L} = \{1\}$

B200/457 (c) $\mathcal{L} = \mathcal{R} \setminus \{1,\ -2\}$

B200/458 (d) $\mathcal{L} = \,]-\infty,\ 1\,[\ \cup\ ]\,5,\ \infty\,[\ = \mathcal{R} \setminus [\,1,\ 5\,]$

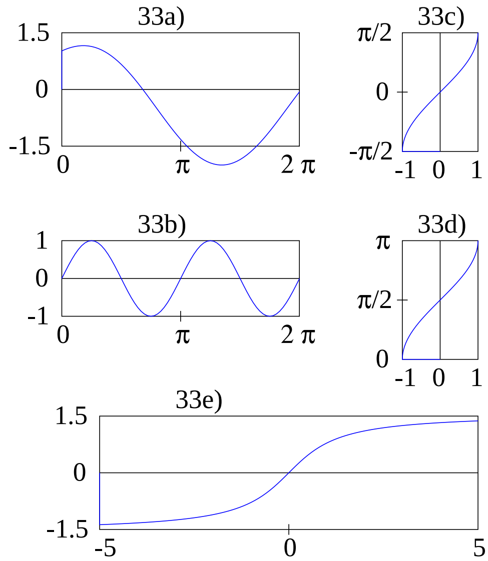
B200/459 (e) $\mathcal{L} = \,]-\infty,\ 1\,[\ \cup\ ]\,2,\ 3\,[\ \cup\ ]\,5,\ \infty\,[$

27 B201/472 $T_1 = 60\ min, \quad T_2 = 84\ min$

28 B201/478 $v_A = 35\ m/min, \quad v_B = 60\ m/min$

29 B202/495 $R_1 = 26.84\ \Omega, \quad R_2 = 226.84\ \Omega$

30	B203/500	$d = 0.6699\ mm$
31	B236/603	$x = -0.4$
	B236/617	$x = \ln(45)/\ln(3.0074) = 3.4572$
	B236/620	$x = 50/\log(36.63) = 31.9726$
	B236/630	$\mathcal{L} = \{-0.5 \cdot \ln(2),\ -\ln(2)\}$
32	B240/641	$x = 13/8$
	B240/642	$x = 100$ ($x = 0$ keine Lösung)
33		(s. Abbildungen) $\longrightarrow$
34	B274/674	$A = 4190.2380\ cm^2$, $U = 268.73\ cm$
35	B274/677	$A = 14.6329\ m^2$



36	B275/686	$A = (11\pi + 48 - 72 \cdot \arctan(\frac{2}{3})) \cdot \frac{r^2}{25} = 1.6089\ r^2$
37	B301/724	$\alpha = 47.9075°$, $\beta = 61.2807°$, $\gamma = 70.8118°$, $A = 6.0705\ cm^2$
38	B302/738	$F_1 = 49.3296\ kN$, $F_2 = 69.5783\ kN$, $F_{S_x} = 39.9085\ kN$, $F_{S_y} = 28.9952\ kN$
39	B317/745	$b = 106.464\ m$, $c = 38.56\ m$, $\beta = 119.3115°$, $\gamma = 18.4085°$
40		(a) $\delta = 47.0062°$, (b) $\delta = 16.6147°$
41	B361/800	(a) $a = 6.4031,\ b = 6.7082,\ c = 8.2462$ (b) $y = 0.25x - 0.5$ (c) $\alpha = 49.3987°,\ \beta = 52.6961°,\ \gamma = 77.9052°$ (d) $y = -4x + 9$ (e) $(2.2353,\ 0.0588)$ (f) $(1.4286,\ 3.2857)$ (g) $(1.7857,\ 0.8571)$ (h) $R = 4.2167$ (i) $(5/3,\ 5/3)$ (k) $A = 21$
42	B361/805	(a) $A(-8,-8),\ B(6,-8),\ C(1,4)$, (b) $a = 13,\ b = 15,\ c = 14$ (c) $\alpha = 53.1301°,\ \beta = 67.3801°,\ \gamma = 59.4898°$, (d) $H(1,-4.25)$
43	B374/824	$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 13^2$
44	B374/825	$d = r = 13\ LE$ (Gerade berührt den Kreis)
45	B383/846	$d = 241/52 = 4.6346\ LE$
46	B384/852	$B(8,-6),\ C(6,8),\ \delta = 90°,\ A = 50\ FE$
47	B384/855c	Nur ein Schnittpunkt: $P(-4,-4)$, $\delta = 0°$ (Kreise berühren sich)
48	B384/859	2 Lösungen: $M_1 = (10.9818, -8.97)$, $M_2 = (-5, 16)$
49		(a) Normalenvektoren der Ebenen berechnen und zeigen, dass sie parallel sind. $d = a \cdot b \cdot c/\sqrt{b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot b^2}$ (b) $V = a \cdot b \cdot c/6$, d wie in Teil (a)
50		$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

51		$x_1 = -25.0520\ m$; $x_2 = 74.9480\ m$; $b = 20 - 500 \cdot \text{arcosh}(x_2/500) = -480.6277\ m$ Tiefester Punkt: $y_0 = 500 + b = 19.3723\ m$
52		(a) $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$; $\vec{a} = \dot{\vec{v}} \Rightarrow \mid \vec{a} \mid = r \cdot \omega^2$
53		Ansatz: $y = a \cdot \sin(\omega \cdot x) \Rightarrow a = 50;\ \omega = \pi/200$
54		(a) $x_p = 10\ m$; (b) $\alpha = 75.96°$; $v_p = 20.62\ m/s$
55		$\alpha = 45°$, $x_w = \frac{v_0^2}{g}$
56	B394/876	(a) $y = -2 \cdot x^2/(3 \cdot L) + h$ (b) $s_0 = L/\sqrt{2}$ (c) $\overline{CD} = 29.44\ m$; $h_1 = h_4 = 3.22\ m$; $h_2 = h_3 = 5.31\ m$
57	B395/880	Parabel: $y_p^2 = 36 + 12x_p$
58	B406/898	(a) $y_T = 1.25 \cdot x - 7.8125$ $y_N = -0.8 \cdot x + 3.4625$ (b) $P_5(-2; 3.75)$
59	B406/904	(a) Ecke auf Parabelachse: $a = 3 \cdot \sqrt{3}$; $A = 6.75 \cdot \sqrt{3}$ (b) Alle größeren Werte für A möglich
60	B406/908	$y_T = \pm 0.75 \cdot x \pm 12.5$; $P_1 = (50/3;\ 25)$; $P_2(-6;\ 8)$
61	B407/914	$f = 3.63$ cm
62		$P(1.5; \sqrt{1.5})$; $d = \sqrt{1.75} - 1$
63	B414/926	(a) $A = 4 \cdot a^2 \cdot b^2/(a^2 + b^2)$ (b) ja, falls $a \neq b$: $A = 2 \cdot a \cdot b$
64	B414/933	$d_2 = 69.81 \cdot 10^6\ km$
65	B415/938	Ellipse mit $a = (m + n)$; $b = (m - n)$
66	A150/119	$\alpha_1 = 54.1825°$, $\alpha_2 = 125.8175°$
67	A150/121a	$x_1 = 1$, $x_2 = 1/3$
68	A150/123a	$f(x) = -2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 2$
69	A151/131	$a^2 < 3 \cdot b$
70	A151/134	$f(x) = 1.25 \cdot x^3 - 1.75 \cdot x + 2.5$, $P_3(0, 2.5)$
71	A160/157	$s = 22.7778$ m
72	A175/168	(b) $v = -\omega \cdot r \cdot (\sin(\omega \cdot t) + (r/(2 \cdot L)) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t))$, (c) $a = -\omega^2 \cdot r \cdot (\cos(\omega \cdot t) + (r/L) \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t))$ (d) $v_{P_x} = (m \cdot \dot{x} - n \cdot r \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t))/(m + n)$, $v_{P_y} = (n \cdot r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))/(m + n)$
73	A176/173	$y'_{1/2} = \pm 4/3$
74	A189/193a A189/193f	(a) $-23/7 = -3.2857$ (b) 1
75	A213/198p	$\mathcal{D} = \mathcal{R}^+ \backslash \{1\}$, keine Symmetrie, $f(x \to \infty) = \infty$, $\mathcal{W} = \mathcal{R}^+$ keine Nullstellen, keine Extremwerte (in $\mathcal{D}$), Wendepunkt $x_w = 3$, Pol bei $x = 0$
76	A190/194g A190/194h	(a) 0.5 (b) 0

77	A213/198f	(a) $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, symmetrisch zur y-Achse, $\mathcal{W} = [-9/4, 1[$ $f(x \to \infty) = f(x \to -\infty) = 1$, stetig, Nullstellen bei ± 3, Minimum $(0, \; -2.25)$, Wendepunkte bei $x_w = \pm 2/\sqrt{3}$
	A213/198g	(b) $\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{1, 5\}$, keine Symmetrie zur x–Achse, $\mathcal{W} = \mathcal{R} \setminus]1/2, 2]$, $\quad f(x \to \infty) = f(x \to -\infty) = 2$ Nullstellen bei 2 und 4, Maximum (3, 0.5), keine Wendepunkte
78	A213/200b	$x_E = \pm\sqrt{a \cdot b}, \quad y_E = -(\sqrt{\lvert a \rvert} \mp \sqrt{\lvert b \rvert})^{-2}$. Falls $a = b$: nur eine Lösung.
79	A213/203	$y = x^5 - 5 \cdot x^4 + 8.5 \cdot x^3 - 5.5 \cdot x^2$
80	A218/205	(a) $a = b = r \cdot \sqrt{2}$, (b) wie (a), (c) $a = r, \; b = a \cdot \sqrt{3}$, (d) $a = 2 \cdot r/\sqrt{3}, \; b = a \cdot \sqrt{2}$
81	A219/211	(a) $a = \sqrt{2 \cdot A} = 1.414 \; m$, $b = a/2$ (b) $a = b \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 0.3558 \; m, \; b = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{4-\sqrt{3}}} = 1.3280 \; m$ (c) $a = \sqrt{2 \cdot A} = 1.414$ m, (d) $r = \sqrt{2 \cdot A/\pi} = 0.6366, \; a = 0$
82	A219/212	(a) $r = R \cdot \sqrt{2/3}, \quad h = r \cdot \sqrt{2}$, (b) $r = R/\sqrt{2}, \quad h = 2 \cdot r$, (c) $r = R \cdot \sqrt{0.5 + 1/\sqrt{20}}, \; h = 2R \cdot \sqrt{0.5 - 1/\sqrt{20}}$, (d) $r = R \cdot \sqrt{8/9}, \; h = 4 \cdot R/3$
83	A220/216	$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2} \quad (\delta \leq \omega_0 \cdot \sqrt{2})$
84	A221	(a) $x = L/2$, (b) $x = L/\sqrt{3}$, (c) $x = L/2 - a/4$
85	A221/224	78.69%
86	A236/230	$\alpha = \pi/2, \quad \beta = 11.54°$
87	A237/237	(a) $v = a \cdot \tanh(g \cdot t/a)$, (b) $s = 0.5 \cdot g \cdot t^2, \; v = g \cdot t$
88	C49/36	$x = 0.5 \cdot r$
89	C51/7	$x = 5/\sqrt{3}$
90		$x = 1.7193$ als Lösung von $x^4 - 12 \cdot x^3 + 61 \cdot x^2 + 100 \cdot x - 300 = 0$ $\alpha = 18.976°, \quad \beta = 40.568°$
91		Paraboloid
92	A398/567	$\Delta\alpha \approx -0.0062 \; rad = 0.355°$
93	A402/571	$y'(0; 0) = 2$
94	A402/578	$\varphi = 76.87°$
95	A414/598	$P_1(\pm\sqrt{1.25}; \; 0.5)$
96	A414/601	$r = \sqrt{A}$
97	A423/611	$V = 4 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot (1 - 0.375 \cdot \sqrt{3})/3$
98	A500/669	$f = (16.35 \pm 0.05) \; cm$
99	A500/675	$E = (2.110 \pm 0.034) \cdot 10^5$ N/mm^2
100	A511/687	$\Delta\alpha = 0.01°, \quad \Delta e = 0.2 \; m$ (beide Fehleranteile gleich)

Nr.	Ref.	Lösungen
101	A301/385	a) $A = 4e - 7 = 3.8731\ FE$, b) $V = \pi\,(2e^2 - 13/3) = 32.8132\ VE$
102	A306/424	$a = 0.125659312$
103	A337/454	$S(2.6909; 5.9481)$
104	A337/467	$S(9/16; 0; 0)$
105	C152/6	$I = \frac{1}{4a} \cdot \left(\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| - 2 \cdot \arctan(\frac{x}{a})\right)$
106	C185/5	$S(1.8; -0.9)$
107	C188/41	a) $S(-1; 5.6)$, b) $V = \frac{256}{15}\pi\sqrt{2} = 75.8252\ VE$
108	C191/6	$I = \pi \cdot 256/3 = 268.08$
109	C197/3	$W = 157.5\ kNm$
110	C201/21	$s = 20\ LE$

K Klausuren

K.1 (18. 1. 1990)

HOCHSCHULE BREMEN		Fachbereich Maschinenbau
Mathematik I Klausur	Name: Sem.: M 1.4 Datum: 18. 1. 1990	Punkte: Note: Dozent: Dr. Weiß

Allgemeines: Übersichtlich und vor allem leserlich schreiben!
Nur triviale Schritte auslassen, Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.
20/15/10/15/20/20 Punkte

1. Die Eckpunkte eines Dreiecks haben die Koordinaten $A(0,0)$; $B(6,0)$; $C(4,3)$
   a) Berechnen Sie den Winkel β
   b) Wie heißt der Vektor, der die Mitten der Seiten a und c verbindet?
   c) Geben Sie eine Gleichung für die Winkelhalbierende des Winkels α

2. Der Umfang eines Rechtecks ist um 2 größer als der eines Quadrats gleicher Fläche. Die größere Seite des Rechtecks ist doppelt so groß wie die Seite des Quadrats. Wie groß sind die drei Seiten?

3. Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathcal{R}$:
   a) $\ln|x+2| = 2 \cdot \ln|x|$ b) $\sin(x+a) = \cos(x-a)$

4. Eine kubische Parabel berührt die Gerade $y = x - 1$ im Punkt $P_1(3,2)$ und schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $P_2(1,0)$ und $P_3(0,-4)$.
   Wie heißt die Gleichung der Parabel?

5. Die beiden Kreise K_1 und K_2 mit

   $K_1: \quad M_1(2,1);\ r_1 = 2$
   $K_2: \quad M_2(5,5)$

   sollen sich berühren.
   a) Wie groß ist der Radius r_2?
   b) Geben Sie die Normalform der Gleichung für die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt an.

6. Diskutieren Sie die Kurve

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{(x+2)^2}$$

   (Definitionsgebiet, Wertebereich, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Skizze)

K.2 (8. 5. 1990)

HOCHSCHULE BREMEN	Fachbereich Maschinenbau	
Mathematik I Klausur 1.Wiederholung	Name: Sem.: M 1.4 Datum: 8. 5. 1990	Punkte: Note: Dozent: Dr. Weiß

Allgemeines: Übersichtlich und vor allem leserlich schreiben!
Nur triviale Schritte auslassen, Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.
Jede Aufgabe 20 Punkte

1. Gegeben seien zwei Punkte A und B und der Vektor $\vec{a}$

   $A(0,1,0);\ B(2,2,2);\ \vec{a}=(x,0,z)^T$

   a) Der Vektor $\vec{a}$ ist so zu bestimmen, dass er die Länge 1 hat und senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht.
   b) Der Punkt $C(1,1,z)$ mit $z>0$ ist so zu bestimmen, dass die Fläche des Dreiecks ABC den Flächeninhalt 1 erhält.

2. Eine kubische Parabel hat bei $(0,\ 2)$ ihr Maximum und bei $(2,\ -2)$ ihr Minimum.
   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.
   b) Wie groß ist die Steigung der Wendetangente?

3. Lösen Sie folgende Gleichungen:
   a) $\exp(x^2+1)=3\cdot\exp(x)$ b) $\cos(2\cdot x)+\sin(x)=0$

4. In einen Kreisabschnitt der Höhe $h=0.5\,R$ soll ein möglichst großes Rechteck eingezeichnet werden. Wieviel Prozent der Fläche des Kreisabschnitts füllt dieses Rechteck aus?

5. Diskutieren Sie die Kurve

$$(y+1)\cdot(y-1)=\frac{x+1}{x-1}$$

   (Definitionsgebiet, Wertebereich, Achsenschittpunkte, Verhalten im Unendlichen, Skizze)

K.3 (2. 2. 1998)

HOCHSCHULE BREMEN		Fachbereich Maschinenbau
IMAT I Klausur	Name: Sem.: IL/1 Datum: 2. 2. 1998	Punkte: Note: Dozent: Dr. J. Weiß

Allgemeines: Übersichtlich und vor allem leserlich schreiben!
Nur triviale Schritte auslassen, Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.
Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen!

(20/20/20/20/20 Punkte)

1. Auf der (kugelförmigen) ($R_E = 6378\ km$) Erde seien zwei Orte mit den geographischen Koordinaten (Länge Λ, Breite Φ) gegeben:

$$\text{A:}\quad (0^\circ,\ 45^\circ) \qquad\qquad \text{B:}\quad (90^\circ,\ -30^\circ)$$

   a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der beiden Orte auf der Erdoberfläche (Großkreis).

   b) Bei welchem Längengrad wird der Äquator überquert, wenn man auf dem Großkreis weiterfährt?

2. Zwei gleichgroße Kreisscheiben vom Radius R liegen genau übereinander.

   a) Wieviel Prozent der Fläche der unteren Scheibe wird sichtbar, wenn die obere Scheibe um $x = R$ verschoben wird?

   b) Geben Sie die Funktion $A(x)$ der sichtbaren Fläche als Funktion der Verschiebung $|x| \le 2R$ an.

3. Diskutieren Sie die Kurve

$$x \cdot y^2 + x^2 \cdot y = 2$$

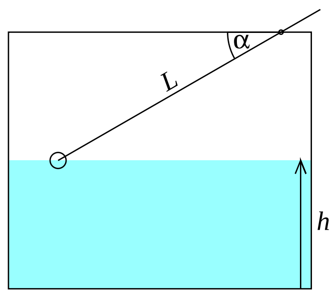
   (Definitionsgebiet, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Extremwerte, Skizze).

4. Ein oben offener zylindrischer Tank (Radius r, Höhe h) mit dem Volumen $V = 1\ m^3$ soll kostengünstig gefertigt werden. Das Blech kostet $DM\ 10/m^2$, das Schweißen des (unteren) Randes $DM\ 10/m$. Welche Gestalt hat der Tank und was kostet er?
Zeigen Sie, dass der optimale Radius $r \approx 0.466\ m$ als Lösung von $r^3 + r^2 = 1/\pi$ ist.
Wie groß ist h/r?

5. Der Füllstand (Höhe h bzw. Volumen V) eines zylindrischen Tanks wird durch den Hebelwinkel α bestimmt (s. Skizze):

$$V = \pi r^2 h, \qquad\qquad h = L \cdot (1 - \sin(\alpha))$$

   Wie genau muss α gemessen werden, wenn der relative Fehler $\Delta V/V$ des Volumens im Bereich $0.1L \le h \le 0.9L$ niemals größer als 1% werden darf (L und r genau bekannt)?



K.4 Ergebnisse der Klausuren

Klausur vom 18. 1. 1990

1. a) $\beta = \arctan(1.5) = 56.31°$; b) $a = (2, 1.5)^T$; c) $y = x/3$
2. $a = 2$; $b = 4$; $c = 1$
3. a) $\mathcal{L} = \{-1,\ 2\}$; b) $x = 45°$ oder $\alpha = 45$ und x beliebig
4. $y = x^3/3 - 7 \cdot x^2/3 + 6 \cdot x - 4$
5. Zwei Lösungen: $r_1 = 3$; $r_2 = 7$
6. $\mathcal{D} = \mathcal{R}\backslash\{-2\}$; $\mathcal{L}_\mathcal{N} = \{3\}$; Keine Extrem- oder Wendepunkte

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$; $\mathcal{W} = \mathcal{R}\backslash\{1\}$

Klausur vom 8. 5. 1990

1. a) $\vec{a} = \pm\sqrt{0.5} \cdot (1, 0, -1)^T$; b) $z_1 = 1.463$, $z_2 = 0.137$
2. a) $y = x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$; b) $y'(1) = -3$
3. a) $x_1 = 1.0904$, $x_2 = -0.0904$; b) $\mathcal{L} = \{90°, 210°, 330°\}$
4. 60.08%
5. $\mathcal{D} = \mathcal{R}\backslash]0,\ 1]$; $\mathcal{L}_\mathcal{N} = \{0\}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)^2 = 2$; $\mathcal{W} = \mathcal{R}\backslash\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Klausur vom 2. 2. 1998

1. (a) $\vec{r}_A = r_E \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ 0 \\ \sin(45°) \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_B = r_E \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B}{\|\vec{r}_A\| \cdot \|\vec{r}_B\|} = -\sin(45°) \cdot \sin(30°) = -0.3536 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110.70°$$

$$\Rightarrow \quad \underline{L = r_E \cdot \varphi \cdot \tfrac{\pi}{180} = 12323\ km}$$

(b) Normalenvektor: $\vec{r}_N = \vec{r}_A \times \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (Längen unwichtig)

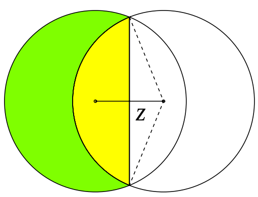
Vektor in Schnittgerade: $\vec{r}_N \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tan(\Lambda) = \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\Lambda = 60°}$

2. (Sichtbare Fläche) = (Kreisfläche) - 2 ∗ (Kreisabschnitt)

(b) $A = \pi R^2 - 2 \cdot (R^2\alpha - z \cdot \sqrt{R^2 - z^2})$

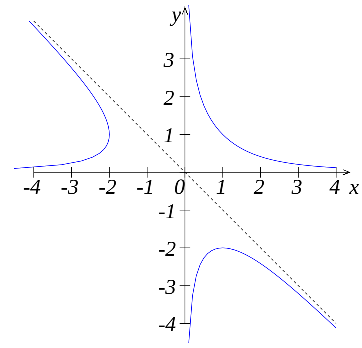
$(z = x/2, \quad \alpha = \arccos(z/R))$

$$\underline{\frac{A}{\pi R^2} = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arccos\left(\frac{x}{2R}\right) - \frac{x}{2R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2R}\right)^2}\right)}$$



(a) $x = R$; $\underline{\dfrac{A}{\pi R^2} \cdot 100 = 60.90\%}$

3. $y_{1/2} = -\dfrac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{2}{x}}$



$\mathcal{D}$: $\frac{x^3+8}{4x} \overset{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$ oder $x \leq -2$

$\Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathcal{R} \backslash]-2,\ 0]$;

$\mathcal{W} = \mathcal{D}$ wegen Symmetrie in x und y

Achsenschnittpunkte: Sowohl für $x = 0$ als auch $y = 0$ folgt: $0 = 2$, d. h. keine Achsenschnittpunkte.

Extremwerte: Implizit differenzieren $\Rightarrow y = -2x \Rightarrow x = 1$

4. Kostenfunktion: $K = 10A + 10U$; $\quad A = \pi r^2 + 2\pi r h$; $\quad U = 2\pi r$

$V = \pi r^2 h = 1 \quad \Rightarrow \quad h = 1/(\pi r^2)$; $\quad K = 10(\pi r^2 + 2/r + 2\pi r)$

$\Rightarrow \quad K' = 10(2\pi r - 2/r^2 + 2\pi) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 + r^2 - 1/\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad r \approx 0.466$

$\Rightarrow \quad \underline{\frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3} = 3.146}$; $\quad \underline{K \approx 79 DM}$

5. $V = \pi r^2 L\,(1 - \sin(\alpha))$

$\Delta V = |\frac{\partial V}{\partial \alpha}| \cdot \Delta\alpha = |\pi r^2 L\,(-\cos(\alpha))\,| \cdot \Delta\alpha = 0.01 \cdot V \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha = \frac{0.01(1-\sin(\alpha))}{\cos(\alpha)}$

Wo wird $\Delta\alpha$ minimal (stärkste Anforderung an Messgenauigkeit)?

$\Rightarrow \quad (\Delta\alpha)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$ ($\Delta\alpha$ dort nicht definiert)

Also Extremwert am Rand des erlaubten Bereichs.

$\Delta\alpha = 0.01\frac{h/L}{\sqrt{1-(1-h/L)^2}} = 0.01\sqrt{\frac{z}{2-z}} \qquad (z = h/L)$

$z = 0.1 :\quad \Delta\alpha = 0.0023, \quad z = 0.9 :\quad \Delta\alpha = 0.0090 \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta\alpha = 0.13^\circ}$